UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01195498 9

The University of Toronto
Chemical Library

Presented
to
The University of Toronto Library
by
William Lash Miller, B.A., Ph.D., C.B.E.
Professor Emeritus of Physical Chemistry
for
A Departmental Library to be under
the control of the Professor of
Chemistry according to the conditions
set out in a letter from the Librarian
of the University dated March 21st.
1938.

13805

ARCHIMEDES,

HUYGENS, LAMBERT, LEGENDRE.

VIER ABHANDLUNGEN ÜBER DIE KREISMESSUNG.

DEUTSCH HERAUSGEGEBEN

UND MIT EINER

ÜBERSICHT ÜBER DIE GESCHICHTE DES PROBLEMES

VON DER

QUADRATUR DES ZIRKELS,

VON DEN ÄLTESTEN ZEITEN BIS AUF UNSERE TAGE,

VERSEHEN VON

Dr. F. RUDIO,

PROFESSOR AM EIDGENÖSSISCHEN POLYTECHNIKUM.

MIT FIGUREN IM TEXT.

365440
39.
20.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1892.

QA
467
R84

Vorwort.

Nachdem es vor nunmehr zehn Jahren Herrn Lindemann gelungen ist, auf Grund der Untersuchungen des Herrn Hermite über die Exponentialfunktion das berühmte Problem von der Quadratur des Zirkels durch den strengen Beweis der Transzendenz der Zahl π endgültig zu erledigen, nachdem dann im Jahre 1885 die Hermite-Lindemann'schen Resultate von Herrn Weierstrafs von neuem und auf einem verhältnismäfsig einfachen Wege abgeleitet worden sind, hat sich das Interesse weitester Kreise wiederum jenem merkwürdigen Probleme zugewandt, dessen Geschichte etwa vier Jahrtausende umfafst und welches daher zu den ältesten Problemen der Menschheit gehört.

Bei einem Abschlusse, wie dem hier erreichten, schweift der Blick wohl gerne in die Vergangenheit zurück, um bei denjenigen Arbeiten vorzugsweise zu verweilen, denen das nunmehr erledigte Problem eine direkte, weithin erkennbare Förderung verdankt. Diese Arbeiten herauszugreifen und allen, die sich für die historische Entwicklung der mathematischen Wissenschaft interessieren, leicht zugänglich zu machen, schien mir daher keine undankbare Aufgabe zu sein. Als solche Marksteine in der geschichtlichen Entwicklung des Problemes von der Quadratur des Zirkels erscheinen nun unter den älteren Arbeiten unzweifelhaft in erster Linie die Abhandlungen: Archimedes, *Κύκλου μέτρησις*; Huygens, De circuli magnitudine inventa; Lambert, Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen; Legendre, Note, où l'on démontre que le rapport de la circonférence au diamètre et son quarré sont des nombres irrationnels. Indem ich diese klassischen Abhandlungen in sorgfältiger Übersetzung dem mathematischen Publikum hiermit vorlege, glaube ich aus verschiedenen Gründen auf ein allgemeines Interesse rechnen zu dürfen. Zunächst darf ja die erfreuliche Thatsache hervorgehoben werden, dafs das Interesse für mathematisch-historische Forschung überhaupt in immer weitere Kreise dringt und dafs

die Berechtigung, ja die Notwendigkeit historischer Studien auch bei den Fachgenossen immer mehr und mehr Anerkennung findet. Sodann aber dürfte es kaum ein zweites Problem geben, welches sich gerade zur Einführung in das Studium der Geschichte der Mathematik so vortrefflich eignete, wie das Problem von der Quadratur des Zirkels, welches, aus unscheinbaren Anfängen hervorgegangen, im Laufe der Jahrhunderte mit fast allen mathematischen Disziplinen sich derart verkettete, dafs schliefslich zu seiner Lösung der gesamte Apparat moderner Wissenschaft aufgeboten und entfaltet werden mufste. Endlich hoffe ich noch speziell den Lehrern der Mittelschulen durch die Herausgabe jener nur noch schwer erhältlichen Abhandlungen einen Dienst zu erweisen. Denn ich zweifle nicht daran, dafs das Studium dieser Abhandlungen, namentlich der viel zu wenig beachteten und doch gerade für den Mathematiklehrer der Mittelschule so eminent wichtigen Huygens'schen Arbeit dem mathematischen Unterrichte reichen Gewinn wird bringen können.

Im einzelnen habe ich noch folgende Bemerkungen zu machen. Die Übersetzung von Archimed's Kreismessung habe ich auf Grund der aufserordentlich sorgfältigen Textausgabe ausgeführt, mit welcher Herr Heiberg*) die mathematische Litteratur in so verdankenswerter Weise bereichert hat und von deren Vortrefflichkeit ich mich, soweit es mir möglich war, durch eingehende Vergleichung mit früheren Ausgaben, namentlich der Editio princeps (Basileae 1544) zu überzeugen suchte. Dafs ich die bereits vorhandenen Übersetzungen von Hauber (Tübingen 1798) und Nizze (Stralsund 1824) benutzte, ist selbstverständlich, indessen weicht meine Übersetzung, die der Kundige sofort als eine vollständig neue erkennen wird, in einem wesentlichen Punkte von den genannten ab. Während nämlich Hauber und Nizze die Abhandlung des Archimedes in die moderne mathematische Formelsprache übertragen haben, war ich der Meinung, dafs eine derartige Behandlung einem Werke nicht nur seine individuelle Färbung raubt, sondern auch falsche Vorstellungen über die mathematische Ausdrucksweise der betreffenden Zeit erweckt. Von der Ansicht ausgehend, dafs auch der Geschichte der mathematischen Sprache und der mathematischen Bezeichnungen ein hohes

*) Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii. E codice florentino recensuit, latine uertit notisque illustrauit J. L. Heiberg, Dr. phil. (Lipsiae in aedibus B. G. Teubneri MDCCCLXXX).

Interesse innewohne, war ich daher bemüht, mich so eng als nur möglich an den griechischen Text zu halten, um ein treues Bild auch von der mathematischen Ausdrucksweise des Archimedes zu geben. Anders verhält es sich natürlich mit den hinzugefügten Anmerkungen, welche, weil nicht von Archimedes herrührend*), in der kürzeren modernen Formelsprache verfafst sind. Dieselben sind sämtlich auf Grund des Kommentares von Eutokius mit Benutzung der Bearbeitungen von Hauber und Nizze sowie der Heiberg'schen Anmerkungen hinzugefügt worden und werden ausreichen, um das Verständnis der sehr knapp gehaltenen Abhandlung zu ermöglichen. An einzelnen Stellen des Textes wurde überdies in Klammern die Einschränkung „nahezu" eingeschaltet.

Bei der Übersetzung von Huygens' Abhandlung „De circuli magnitudine inventa" habe ich mich von den gleichen Anschauungen leiten lassen: ich wollte nicht nur den Inhalt, sondern auch die mathematische Sprache, in welche derselbe gekleidet ist, so getreu als möglich wiedergeben. Auch hier verbot mir die Pietät, die moderne mathematische Formelsprache anzuwenden, auch wenn dadurch manche Abkürzung ermöglicht worden wäre. Der Übersetzung lag die von G. J. 'sGravesande im Jahre 1724 veranstaltete Ausgabe: „Christiani Hugenii opera varia" zu Grunde. Kleinere, als Druckfehler oder Rechenfehler aufzufassende Versehen wurden (auch in den beiden folgenden Abhandlungen) stillschweigend verbessert.

Die Abhandlung von Lambert ist ein wörtlicher Abdruck aus: „Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung durch J. H. Lambert, Berlin 1770". (Zweiter Teil, fünfte Abhandl.) Ich glaubte, die grammatikalischen Eigentümlichkeiten sowie die Orthographie und Interpunktion Lamberts beibehalten zu sollen, trotz gelegentlich vorkommender kleiner Inkonsequenzen (Lambert sagt z. B. bald „die", bald „das" Verhältnis, was sich daraus erklärt, dafs dieses erst im letzten Jahrhundert entstandene Wort damals in der That, wie so viele andere Wörter auf „nis", bald mit dem weiblichen, bald mit dem sächlichen Artikel verbunden wurde).

Bei der Note von Legendre endlich benutzte ich die 14. Auflage von „Éléments de géométrie, avec des notes; par A. M. Legendre" (Paris 1855).

*) Auch die Anmerkungen zu Huygens und Lambert rühren sämtlich von dem Herausgeber her.

Um die genannten Arbeiten in einen organischen Zusammenhang zu bringen, habe ich eine Übersicht über die Geschichte des Problemes von der Quadratur des Zirkels, von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage, vorausgeschickt. Diese, fast die Hälfte des ganzen Buches einnehmende, historische Abhandlung ist eine vollständige Umarbeitung und wesentliche Erweiterung einer früheren Arbeit, welche im 35. Bande der „Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich" erschienen ist. Mit Übergehung alles Nebensächlichen sucht sie jeder wirklich bemerkenswerten Leistung auf dem Gebiete der Kreismessung gerecht zu werden. Wenn auch natürlich von absoluter Vollständigkeit nicht die Rede sein kann, so hoffe ich doch, keine wichtigere Erscheinung übersehen zu haben.

Ich habe mich bemüht, wie dies ja auch durch den Inhalt des vorliegenden Buches zum Teil schon bedingt ist, so viel als nur möglich aus den Originalwerken selbst zu schöpfen. Soweit dies nicht anging, dienten mir in erster Linie als Quellen die vortrefflichen Werke:

Cantor, Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik Band 1 und 2 (kurz citiert mit Cantor I., II.),

Hankel, Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter (citiert mit Hankel),

Wolf, Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Litteratur. In zwei Bänden (citiert mit Wolf I., II.).

Von Arbeiten, die speziell der Quadratur des Zirkels gewidmet sind und von mir ebenfalls benutzt wurden, nenne ich noch: Montucla, Histoire des recherches sur la quadrature du cercle (erste Ausgabe 1754, zweite 1831), und Petri Vorsselmann de Heer responsio ad quaestionem ab academia Groningana propositam: „Detur succincta expositio praecipuarum methodorum, quae ad circuli quadraturam ducunt" (Groningen 1832). Auch Kästner's Geschichte der Mathematik und Klügel's mathematisches Wörterbuch wurden gelegentlich zu Rate gezogen.

Möge das vorliegende kleine Werk eine freundliche Aufnahme finden! Möge dasselbe aber namentlich dazu beitragen, das Interesse für historisch-mathematische Studien zu wecken und zu fördern! In diesem Sinne habe ich es geschrieben und mit diesem Wunsche übergebe ich es der Öffentlichkeit.

Zürich, April 1892.

F. Rudio.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

I.

Übersicht über die Geschichte des Problemes von der Quadratur des Zirkels, von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage.

Erstes Kapitel.

Einleitende Betrachtungen über die Ursachen der Berühmtheit und über die Natur des Problemes von der Quadratur des Zirkels. Charakteristik der verschiedenen Epochen, in welche die Geschichte des Problemes zerfällt.

§ 1. Über die verschiedenen Ursachen der grofsen Popularität des Problemes 3
§ 2. Genaue mathematische Formulierung des Problemes 6
§ 3. Charakteristik der verschiedenen Epochen, in welche sich die Geschichte des Problemes von der Quadratur des Zirkels zerlegen läfst 8

Zweites Kapitel.

Erster Zeitraum.

Von den ältesten Zeiten bis zur Erfindung der Differenzial- und Integralrechnung.

§ 4. Die Ägypter und Babylonier 10
§ 5. Die Griechen 11
§ 6. Die Römer, Inder, Chinesen 17
§ 7. Die Araber und die christlichen Völker des Mittelalters . . . 20
§ 8. Die Zeit der Renaissance 26
§ 9. Von dem Ausgange der Renaissancezeit bis zur Erfindung der Differenzial- und Integralrechnung 32

Drittes Kapitel.

Zweiter Zeitraum.

Von der Erfindung der Differenzial- und Integralrechnung bis zum Beweise der Irrationalität der Zahl π durch Lambert.

§ 10. Die Begründung der neuen Analysis und deren Einfluſs auf die Methoden der Kreismessung 41

Seite

§ 11. Die Thätigkeit von Leonhard Euler auf dem Gebiete der Kreismessung 46

Viertes Kapitel.
Dritter Zeitraum.
Von Lambert bis auf die Gegenwart.

§ 12. Der Beweis der Irrationalität der Zahl π durch Lambert und Legendre 54
§ 13. Die Entdeckungen Liouville's 58
§ 14. Algebraische Formulierung des Problemes von der Quadratur des Zirkels 61
§ 15. Die endgültige Erledigung des Problemes von der Quadratur des Zirkels durch die Arbeiten von Hermite, Lindemann und Weierstrass 63

II.
Archimedes.

Kreismessung 71

III.
Christian Hugyens.

Über die gefundene Gröfse des Kreises 83

IV.
Johann Heinrich Lambert.

Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen 133

V.
Adrien-Marie Legendre.

Beweis, dafs das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser und das Quadrat desselben irrationale Zahlen sind 157

Berichtigungen.

Seite 14, Zeile 5 v. u. lies „2) „Der Kreis etc.“
„ 17 „ 7 v. u. lies „welcher“ statt „welche“.
„ 32 „ 8 v. u. lies „Adriaen“ statt „Adriaan“.
„ 36 „ 3 v. o. lies „geb. zu Löwen 1561“.

Ferner entnehme ich aus dem soeben erschienenen zweiten Teile von Cantor II, dass A. R. 1615 zu Mainz starb, nachdem er seine Professur aufgegeben hatte, und dass er die Zahl π sogar auf 17 Dezimalstellen bestimmte.

Seite 78, Zeile 8, 11 und 13 v. o. setze jedesmal vor „vermehrt“ ein Komma.
„ 91 „ 12 v. o. lies „hinzufügen“.
„ 100 „ 7 v. u. setze vor „und“ ein Komma.

Seite

§ 11. Die Thätigkeit von Leonhard Euler auf dem Gebiete der Kreismessung 46

I.

ÜBERSICHT ÜBER DIE GESCHICHTE DES PROBLEMES

VON DER

QUADRATUR DES ZIRKELS,

VON DEN ÄLTESTEN ZEITEN BIS AUF UNSERE TAGE.

Erstes Kapitel.

Einleitende Bemerkungen über die Ursachen der Berühmtheit und über die Natur des Problems von der Quadratur des Zirkels. Charakteristik der verschiedenen Epochen, in welche die Geschichte des Problemes zerfällt.

§ 1. Über die verschiedenen Ursachen der grofsen Popularität des Problemes.

Unter allen mathematischen Problemen, die im Laufe der Jahrhunderte die Menschheit beschäftigt haben, ist keines zu einer so grofsen Popularität gelangt, wie das Problem von der Quadratur des Zirkels. Die Quadratur des Zirkels suchen ist geradezu eine sprüchwörtliche Redensart geworden, welche so viel bedeutet als: etwas höchst schwieriges, oder gar unmögliches und darum müfsiges unternehmen. Unter allen mathematischen Problemen hat auch keines ein höheres Alter aufzuweisen, als das in Rede stehende, denn die Geschichte dieses Problemes umfafst einen Zeitraum von rund 4000 Jahren, ist also so alt wie die Geschichte der menschlichen Kultur.

Fragt man nun, worin denn die grofse Berühmtheit gerade dieses speziellen mathematischen Problemes begründet ist, so wird sich eine völlig befriedigende Antwort allerdings nur aus der Geschichte des Problemes selbst gewinnen lassen. Denn man kann nicht behaupten, dafs das Problem an und für sich, herausgerissen aus dem Zusammenhange mit den vielen andern mathematischen Fragen, die sich im Laufe der Zeit mit jenem verknüpft haben, für die Wissenschaft oder ihre Anwendungen diejenige grofse Bedeutung besitze, die ihm von Fernerstehenden vielfach zugesprochen worden ist. Es hat viel wichtigere, wissenschaftlich interessantere und praktisch wert-

vollere Probleme gegeben, die auch eine Jahrhunderte lange Geschichte aufzuweisen haben und die doch niemals in das grofse Publikum gedrungen sind. Man braucht, um ein Beispiel herauszugreifen, nur an den Satz zu erinnern, den im Jahre 1829 der Genfer Mathematiker Charles Sturm entdeckt hat, an jenen schönen Satz, der es erlaubt, für jede algebraische Gleichung mit reellen Koeffizienten die Anzahl der zwischen beliebig gegebenen Grenzen liegenden reellen Wurzeln genau zu bestimmen.

Das Problem von der Quadratur des Zirkels ist vielmehr aus meist sehr trivialen Gründen zu seiner grofsen Berühmtheit gelangt. Zunächst gehört es zu den sehr wenigen mathematischen Problemen, die nur ausgesprochen werden müssen, um auch sofort von jedem verstanden zu werden. Jeder Mensch weifs, was ein Kreis und was ein Quadrat ist. Jeder weifs, oder glaubt wenigstens zu wissen, was man unter dem Flächeninhalte einer begrenzten Figur zu verstehen habe, und jedem erscheint es daher als eine sehr einfache, leicht verständliche Aufgabe, ein Quadrat zu zeichnen, dessen Flächeninhalt genau gleich demjenigen eines gegebenen Kreises sei. Der Umstand nun, dafs eine scheinbar so einfache Aufgabe doch den Anstrengungen der gröfsten Geister den hartnäckigsten Widerstand entgegensetzte, hat von jeher eine eigentümliche Anziehungskraft ausgeübt auf die Mathematiker und vielleicht noch mehr auf die Nichtmathematiker, denen ja doch das Geheimnis der Fragestellung meistens verborgen blieb. Auf diese Weise bildete sich im Laufe der Jahrhunderte ein eigentümlicher Nimbus um das Problem: seine Berühmtheit wuchs in dem gleichen Mafse wie die Anzahl der mifsglückten Lösungsversuche.

Dazu kam noch ein Zweites. In früheren Zeiten, wo die Metaphysik die Gemüther noch stärker beschäftigte als heutzutage, verband man mit dem Probleme vielfach einen merkwürdigen Aberglauben. Man stellte sich nicht selten vor, dafs derjenige, dem die Lösung dieser spröden, unzugänglichen Aufgabe gelingen würde, dadurch in den Stand gesetzt wäre, dem Zusammenhange der Erscheinungen überhaupt ein tieferes Verständnis entgegenzubringen. Man versprach sich also von der Lösung des Problemes eigentümliche Vorteile, von denen

man sich zwar keine klaren Vorstellungen zu bilden wufste, deren Annahme aber doch ausreichte, um dem Probleme von der Quadratur des Zirkels vielfach den Rang anzuweisen, den etwa der Stein der Weisen, das Lebenselixir oder andere erstrebenswerte Dinge einnahmen.

Und endlich wirkte noch ein Drittes mit, um unserem Probleme, namentlich in nichtmathematischen Kreisen, zu seiner Berühmtheit zu verhelfen. Mit Rücksicht auf die grofse Bedeutung, die dem Probleme für die Mathematik und ihre Anwendungen von manchen zugeschrieben wurde, verbreitete und erhielt sich bis in die neueste Zeit der Glaube, dafs die grofsen Akademieen hohe Preise ausgesetzt hätten für denjenigen, der so glücklich wäre, endlich eine Lösung des berühmten Problemes beizubringen. Das war nun allerdings ein arger Irrtum. Denn schon im Jahre 1775 gab die Pariser Akademie (und die anderen folgten bald nach), ermüdet durch die unaufhörlichen Belästigungen Seitens der „Quadratoren", die folgende Erklärung ab: „L'Académie a pris, cette année, la résolution de ne plus examiner aucune solution des problèmes de la duplication du cube, de la trisection de l'angle ou de la quadrature du cercle, ni aucune machine annoncée comme un mouvement perpétuel" (Histoire de l'Académie royale, année 1775, pag. 61). Der Erklärung folgten Betrachtungen, in welchen Condorcet, der damalige ständige Sekretär der Akademie, klar und präzis die Gründe entwickelte, welche zu dem mitgeteilten Entschlusse geführt hatten*). Allerdings haben derartige Akademiebeschlüsse die Zahl der „Quadratoren" nicht zu vermindern vermocht, nur mit dem Unterschiede, dafs sich bei diesen zu dem Bewufstsein einer grofsen That nunmehr gekränkte Eitelkeit und der Glaube hinzugesellten, von der Mathematikerzunft aus Neid oder andern kleinlichen Rücksichten nicht anerkannt worden zu sein.

---

*) In der Begründung, die zugleich eine kurze Übersicht über die Entwicklung des Problemes von der Quadratur des Zirkels enthält, wird auffallenderweise die Lambert'sche Entdeckung der Irrationalität der Zahl π nicht erwähnt.

§ 2. Genaue mathematische Formulierung des Problemes.

Bevor wir uns zu einer historischen Übersicht wenden über die verschiedenen der Quadratur des Zirkels gewidmeten Bestrebungen, möge zunächst kurz daran erinnert werden, um was es sich bei diesem Probleme eigentlich handelt. Bezeichnet man den Radius eines Kreises mit r, den Durchmesser desselben mit $d = 2r$, seinen Umfang mit u und seinen Flächeninhalt mit J, so hat man:

$$u = \pi d = 2\pi r, \tag{1}$$

$$J = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{1}{2} ru, \tag{2}$$

insofern π das für alle Kreise gleiche Verhältnis des Umfanges zum Durchmesser bedeutet. Seit der Mitte des letzten Jahrhunderts weifs man, dafs π sich nicht als das Verhältnis zweier ganzer Zahlen ausdrücken läfst, also keine rationale Zahl ist. Als Dezimalbruch dargestellt beginnt π mit 3,141592653589793 .... Es dürfte nicht unnötig sein, darauf hinzuweisen, dafs dem Nichtmathematiker die Quadratur des Zirkels gewöhnlich deswegen als unausführbar erscheint, weil man die Zahl π numerisch immer nur angenähert, aber nie ganz genau angeben könne. Wir werden später noch auf diese Frage zurückkommen und dann erfahren, inwieweit die Unmöglichkeit der Quadratur des Zirkels mit der Irrationalität von π zusammenhängt.

Aus Formel (2) geht die bekannte Thatsache hervor, dafs der Inhalt des Kreises dem Inhalte eines Dreiecks gleichkommt, dessen Grundlinie der Umfang und dessen Höhe der Radius des Kreises ist. Wäre man nun imstande, aus dem gegebenen Radius den Umfang zu konstruieren, also die Rektifikation des Kreises konstruktiv auszuführen, so könnte man auch jenes Dreieck konstruieren und dieses nach bekannten planimetrischen Vorschriften leicht in ein inhaltsgleiches Quadrat verwandeln. Umgekehrt müfste, wenn der Kreis durch eine Konstruktion in ein inhaltsgleiches Quadrat verwandelt werden könnte, auch die konstruktive Herstellung jenes Dreiecks und folglich auch des Kreisumfanges möglich sein. Man sieht also, dafs die notwendige und hinreichende Bedingung

für die Möglichkeit der Quadratur des Zirkels darin besteht, dafs man imstande sei, aus einer gegebenen Strecke d die Strecke $u = \pi d$ zu konstruieren. Um diese Aufgabe aber zu einer unzweideutig bestimmten zu machen, ist zunächst notwendig, anzugeben, was hier unter „konstruieren“ und „Konstruktion“ gemeint ist.

Ein grofser Teil der planimetrischen Konstruktionsaufgaben (wie z. B. die Verwandlung eines beliebigen Polygones in ein inhaltsgleiches Quadrat) kann gelöst werden durch ausschliefsliche Kombination der beiden folgenden Elementaraufgaben:

1) Durch zwei gegebene Punkte eine gerade Linie zu ziehen;
2) Um einen gegebenen Punkt mit einem gegebenen Radius einen Kreis zu beschreiben.

In der That, wenn man sich etwa überlegt, wie ein Polygon in ein inhaltsgleiches Quadrat verwandelt wird, so geschieht dies doch, indem man einfachere, als bereits gelöst vorausgesetzte Aufgaben zur Anwendung bringt (wie etwa durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden eine Parallele zu ziehen). Diese stützen sich wiederum auf noch einfachere u. s. f., bis man schliefslich zu den beiden genannten Elementaraufgaben gelangt, aus deren wiederholter Anwendung alle bei der ursprünglich gegebenen Aufgabe auszuführenden Konstruktionen sich zusammensetzen. Jene beiden Elementaraufgaben lassen sich nicht auf einfachere zurückführen, sie werden vielmehr in der Planimetrie als gelöst vorausgesetzt: die erste wird durch Benutzung des Lineals, die zweite durch Benutzung des Zirkels ausgeführt. Mit Rücksicht darauf, dafs die Lösung dieser beiden Elementaraufgaben von der Planimetrie nicht gegeben, sondern vielmehr als bereits vollzogen gefordert wird, werden dieselben auch Postulate genannt.

Unter „konstruieren“ soll nun hier allemal „mit alleiniger Benutzung von Zirkel und Lineal konstruieren“ verstanden werden. Die Frage nach der Möglichkeit der Quadratur des Zirkels soll also bedeuten: Ist es möglich, durch ausschliefsliche Kombination der beiden genannten Elementaraufgaben, also mit alleiniger

Benutzung von Zirkel und Lineal den Kreis in ein inhaltsgleiches Quadrat zu verwandeln? Wir haben gesehen, dafs diese Frage sich auf die Möglichkeit der Konstruktion der Strecke πd aus der Strecke d reduziert, wo der Ausdruck „Konstruktion“ in dem eben definierten Sinne zu nehmen ist.

§ 3. Charakteristik der verschiedenen Epochen, in welche sich die Geschichte des Problemes von der Quadratur des Zirkels zerlegen läfst.

Wenn wir in den folgenden Kapiteln eine kurze historische Übersicht über die Entwicklung des Problemes von der Quadratur des Zirkels von den ältesten Zeiten bis zu seiner im Jahre 1882 erfolgten definitiven Erledigung zu geben versuchen, so ist natürlich zu beachten, dafs die Fragestellung nicht schon von alters her die in dem vorhergehenden Paragraphen gegebene Präzision besessen, sondern diese vielmehr erst im Laufe der Jahrhunderte gewonnen hat. Ferner wird sich unsere Darstellung nicht auf diejenigen mathematischen Arbeiten beschränken dürfen, welche sich direkt die Quadratur des Zirkels zum Ziele gesetzt haben. Wir werden vielmehr, mit Rücksicht auf den engen Zusammenhang zwischen Quadratur und Rektifikation des Kreises, unsere Aufmerksamkeit allen wichtigeren Arbeiten zuwenden müssen, welche für die Erforschung der Zahl π, oder überhaupt für die Kreismessung, einen Fortschritt bedeuten. Sehen wir von denjenigen Erscheinungen ab, denen ein wirklich wissenschaftliches Interesse nicht zugesprochen werden kann und die daher für uns nicht in Betracht kommen, so lassen sich in bezug auf die Geschichte unseres Problemes leicht drei grofse Zeitabschnitte unterscheiden, die ihrem Inhalte nach sich deutlich von einander abheben.

Der erste Zeitraum reicht von den ersten Anfängen mathematischer Spekulation bis zur Erfindung der Differenzial- und Integralrechnung, also bis zur zweiten Häfte des 17. Jahrhunderts. Die näherungsweise Quadratur des Zirkels mittels geometrischer Betrachtungen — vorzugsweise, ja fast ausschliefslich mit Hülfe der dem Kreise eingeschriebenen und

umgeschriebenen Polygone — mit andern Worten, die von den griechischen Mathematikern begründete Methode der geometrischen Exhaustion bildet den Mittelpunkt der auf unser Problem bezüglichen wissenschaftlichen Untersuchungen dieses Zeitraumes. Archimedes und Huygens sind die bedeutendsten Vertreter desselben: Jener hat die Methode der eingeschriebenen und umgeschriebenen Polygone mathematisch begründet, dieser dieselbe zu demjenigen Grade der Vollendung gebracht, der mit elementaren Hülfsmitteln noch erreichbar war.

Der zweite Zeitraum umfafst die Zeit von der Erfindung der Differenzial- und Integralrechnung bis zum Jahre 1766, d. h. bis zum Entstehungsjahre der grundlegenden Abhandlung Lambert's. Kaum ein Jahrhundert zwar, aber das Jahrhundert von Newton, Leibnitz, den Bernoulli's und Leonhard Euler! An die Stelle der geometrischen Methode der Alten treten die unerschöpflichen Hülfsmittel der neu begründeten Analysis, welche, wenn auch ihrem Wesen nach in der Exhaustionsmethode wurzelnd, doch dem Probleme von der Quadratur des Zirkels ein gänzlich verändertes Aussehen gab und der darauf bezüglichen Forschung völlig neue, vorher nie geahnte Bahnen eröffnete.

Handelte es sich in dem ersten Zeitraume vorzugsweise darum, die Zahl π so genau als nur irgend wünschenswert numerisch zu berechnen, also die näherungsweise Quadratur des Zirkels mit jeder nur denkbaren Genauigkeit auszuführen — eine Aufgabe, welche in diesem Zeitraume selbst für die subtilsten Anforderungen der Wissenschaft wie der Praxis vollständig gelöst worden ist — so war vielmehr der zweite Zeitraum fast ausschliefslich durch das wesentlich theoretische Interesse beherrscht, die Zahl π durch analytische Ausdrücke, denen eine unendliche Reihe von Operationen zu Grunde lag, darzustellen.

Im Gegensatze zu diesen beiden Zeiträumen kann der dritte als der kritische bezeichnet werden: Nicht mehr die Frage nach der Gröfse oder nach der analytischen Darstellung der Zahl π war es, welche die Mathematiker in erster Linie beschäftigte, sondern vielmehr, welcher Art, welcher Natur diese merkwürdige Zahl sei, ob rational oder irrational, ob

algebraisch oder transzendent. Nachdem im Jahre 1766 Lambert den ersten Beweis für die Irrationalität der Zahl π erbracht hatte, nachdem dann dieser Beweis durch Legendre vervollständigt und erweitert worden war, erstanden in unserem Jahrhundert die Arbeiten, welche das Problem von der Quadratur des Zirkels zum Abschlusse gebracht haben und welche durch die Namen Liouville, Hermite, Lindemann und Weierstrafs bezeichnet sind.

Zweites Kapitel.

Erster Zeitraum.

Von den ältesten Zeiten bis zur Erfindung der Differenzial- und Integralrechnung.

§ 4. Die Ägypter und Babylonier.

Die älteste nachweisbare Spur von dem Probleme der Quadratur des Zirkels findet sich in dem „*Papyrus Rhind des British Museum*“ (übersetzt und erklärt von Aug. Eisenlohr, Leipzig 1877), einem mathematischen Handbuche der alten Ägypter, welches in der Zeit zwischen 2000 und 1700 v. Chr. von dem Schreiber Ahmes des Hiksoskönigs Ra-a-us verfafst wurde und zwar, wie in dem Buche gesagt wird, „nach dem Vorbilde von alten Schriften, die verfertigt wurden in den Zeiten des Königs Raenmat“, die also jedenfalls noch einige Jahrhunderte älter sind als der Papyrus Rhind*). Die in dem Papyrus ohne weitere Begründung gegebene Vorschrift besagt, der Flächeninhalt des Kreises sei gleich dem eines Quadrates, dessen Seite der um $\frac{1}{9}$ seiner Länge verminderte Kreisdurchmesser ist. Um sich ein Urteil über die Genauigkeit dieser Vorschrift, die auch in späteren Jahrhunderten in Ägypten wiederholt auftrat, zu bilden, hat man nur $\left(\frac{8}{9}\right)^2 d^2 = \frac{64}{81} d^2$ mit $\frac{1}{4} \pi d^2$

*) Vergl. Cantor, Vorlesungen I., pag. 20 u. flg.

zu vergleichen, woraus sich für π der Wert $\frac{256}{81} = 3{,}1604\ldots$, also bereits eine recht respektable Annäherung, ergiebt.

Von den Babyloniern rührt die Entdeckung her, dafs der Kreishalbmesser sechsmal als Sehne in den Kreis eingetragen werden kann, eine Entdeckung, welche damit im Zusammenhange steht, dafs die Babylonier das Jahr in 360 Tage und dementsprechend den Kreis (die scheinbare Bahn der Sonne) in 360 Grade eingeteilt haben. Diese Sechsteilung des Kreises führte dann bei oberflächlicher Betrachtung leicht zu der ersten, wenn auch sehr ungenauen Rektifikation des Kreises, nämlich zu der Annahme, es sei der Kreisumfang das Sechsfache des Halbmessers oder das Dreifache des Durchmessers. Der aus dieser Annahme sich ergebende Wert $\pi = 3$ zeigt sofort, um wieviel diese Anschauung an Genauigkeit hinter der ägyptischen, welche durch $\pi = 3{,}1604\ldots$ bezeichnet war, zurücksteht. Man kann die babylonische Rektifikation des Kreises auch an verschiedenen Stellen in der Bibel antreffen. So heifst es (1. Buch der Könige 7, 23 und 2. Buch der Chronika 4, 2) von dem grofsen Waschgefäfse, das unter dem Namen des ehernen Meeres den Tempel schmückte, den Salomo von 1014 bis 1007 erbauen liefs: „Und er machte ein Meer, gegossen, 10 Ellen weit von einem Rande zum andern, rund umher, und 5 Ellen hoch, und eine Schnur 30 Ellen lang war das Mafs ringsum.“ Die Annahme, dafs der Umfang des Kreises dreimal so grofs sei als der Durchmesser, hat sich noch Jahrhunderte lang fortgeerbt und findet auch im Talmud wieder ihren Ausdruck in dem Satze: Was im Umfange 3 Handbreiten hat, ist 1 Hand breit.“*)

§ 5. Die Griechen.

Ob sich die ältesten griechischen Mathematiker wie Thales von Milet (ungefähr 640—548) und Pythagoras von Samos, „der Vater der Mathematik“ (ungefähr 580—500), mit der Quadratur des Zirkels beschäftigt haben, wissen wir nicht,

*) Cantor I., pag. 83 und 91. Siehe ferner: Mahler, Beitrag zur Geschichte der Mathematik (Zeitschrift für Math. u. Phys., Jahrgang 27, Historisch-literarische Abt. pag. 207).

doch darf als gesichert angesehen werden, dafs beide sich in Ägypten aufgehalten und die Geometrie der Ägypter nach Griechenland verpflanzt haben. Dies war auch die Auffassung des ganzen griechischen Altertumes.

Den ersten Spuren des Problemes von der Quadratur des Zirkels begegnen wir auf griechischem Boden erst im 5. Jahrhundert v. Chr. Anaxagoras von Klazomene (500—428) soll nach dem Berichte Plutarch's (in der Schrift „De exilio", Kap. 17) im Jahre 434 im Gefängnisse den Kummer über seine Haft mit mathematischen Spekulationen sich vertrieben und „die Quadratur des Kreises gezeichnet" haben. Vermutlich hat Anaxagoras, der übrigens nach dem Zeugnisse Platons ein hervorragender Mathematiker war, nach Art der ägyptischen Quadratur ein der Kreisfläche näherungsweise gleiches Quadrat gezeichnet und ist der Meinung gewesen, die Aufgabe genau gelöst zu haben. Jedenfalls aber verschwand von nun an das Problem nicht mehr von der Tagesordnung.

Im Jahre 420 erfand der Mathematiker Hippias von Elis eine Kurve, welche zu doppeltem Zwecke dienen konnte, nämlich sowohl zur Dreiteilung des Winkels als auch zur Quadratur des Kreises. Es war dies die unter dem Namen *τετραγωνίζουσα*, oder Quadratrix, bekannte transzendente Linie. Diese Linie löst allerdings, wie später von Dinostratus (in der zweiten Hälfte des vierten Jahrhunderts) gezeigt wurde, die Aufgabe der Rektifikation des Kreises, aber da sie eben selber durch Zirkel und Lineal nicht herstellbar ist, so giebt sie keine Lösung in dem im ersten Kapitel festgesetzten Sinne*).

Über die Sophisten, die sich zu jener Zeit ebenfalls des Problemes bemächtigten und von denen einige in ihrer Wortklauberei soweit gingen, dafs sie die Quadratur des Zirkels von dem Auffinden „cyklischer Quadratzahlen" d. h. solcher Quadratzahlen, welche mit derselben Endziffer abschliefsen wie ihre Wurzel (wie z. B. $25 = 5^2$, $36 = 6^2$), abhängig machten**), könnte unsere Darstellung füglich hinweggehen, wenn nicht zwei der-

*) Vergl. Bretschneider, Die Geometrie und die Geometer vor Euklides (Leipzig, 1870), pag. 94—96 und 153—155; ferner Cantor I., pag. 164—168 und 212—213.

**) Vergl. Bretschneider, pag. 106.

selben, Antiphon und Bryson, beide Zeitgenossen des Sokrates (469—399), in hohem Grade unsere Aufmerksamkeit verdienten. Antiphon stellte folgende Überlegung an: Wenn man einem Kreise ein Quadrat einschreibt und dann von diesem zum regulären Achteck, Sechzehneck u. s. w. übergeht, bis dadurch der Kreis völlig erschöpft wird, so gelangt man schliefslich zu einem Vieleck, welches wegen der Kleinheit seiner Seiten mit dem Kreise zusammenfällt. Da man aber zu jedem Vieleck ein gleichflächiges Quadrat zeichnen kann und der Kreis durch ein gleichflächiges Vieleck ersetzt worden ist, so kann man auch ein dem Kreise gleichflächiges Quadrat konstruieren*). Wenn auch Antiphon dabei übersah, dafs auf diesem Wege doch stets nur eine angenäherte Quadratur zu erzielen sei, so hat er gleichwohl hiermit „als der erste den völlig richtigen Weg betreten und den Flächeninhalt eines krummlinigen Raumes zu ermitteln versucht, indem er ihn durch Vielecke von immer wachsender Seitenzahl zu erschöpfen (exhaurire) suchte“**).

Bryson***) ging noch über Antiphon hinaus, indem er den eingeschriebenen Polygonen auch die umgeschriebenen hinzufügte und dadurch den Begriff einer unteren und oberen Grenze in die Mathematik einführte.

Von denjenigen Mathematikern, welche vor Archimedes das Problem von der Quadratur des Zirkels behandelt und gefördert haben, nimmt Hippokrates von Chios einen hohen Rang ein. Dieser Gelehrte, der in der zweiten Hälfte des 5. Jahrhunderts in Athen lebte und dort Vorträge über Geometrie hielt, hat das erste Lehrbuch der Elemente der Geometrie verfafst. Man verdankt ihm ferner den ersten Beweis des Satzes, dafs Kreisflächen den Quadraten ihrer Durchmesser proportional sind und endlich das erste Beispiel einer wirklichen Quadratur krummlinig begrenzter Flächenräume. Es sind dies jene mondförmigen Flächenräume (Menisken), welche unter

*) Bretschneider, pag. 101, 125.

**) Hankel, pag. 117. Vergleiche übrigens hiermit auch die von Vieta auf Grund der Antiphon'schen Ideen gegebene Darstellung der Kreisquadratur (pag. 33—34 dieses Buches).

***) Siehe Bretschneider, pag. 125—129.

dem Namen „Lunulae Hippokratis“ aus den Elementen allgemein bekannt sind. Mit Hülfe solcher Mondchen mühte sich nun Hippokrates ab, auch den Kreis zu quadrieren, was ihm freilich nicht gelingen konnte*).

Trotz der Versuche aller der genannten Geometer konnte aber von einer wirklich wissenschaftlichen Inangriffnahme des Problemes von der Quadratur des Zirkels noch keineswegs gesprochen werden**). Von der ägyptischen Vorschrift abgesehen, war man überhaupt über Andeutungen, Pläne, Vermutungen nicht hinausgekommen. Derjenige Mathematiker, dem das Problem der Ausmessung des Kreises die erste gründliche, wissenschaftliche Behandlung verdankt, ist Archimedes von Syrakus (geboren 287 in Syrakus, wurde er bei der Eroberung seiner Vaterstadt durch Marcellus im Jahre 212 von einem römischen Soldaten getötet), die weitaus bedeutendste mathematische Erscheinung des ganzen Altertumes***).

In der unschätzbaren grundlegenden Abhandlung „Die Kreismessung“ (*κύκλου μέτρησις*) beweist Archimedes die drei Sätze: 1) „Jeder Kreis ist einem rechtwinkligen Dreiecke inhaltsgleich, insofern der Radius gleich der einen der den rechten Winkel einschliefsenden Seiten, der Umfang aber gleich der Basis ist.“ 2) Der Kreis hat zum Quadrate seines Durchmessers (nahezu) ein Verhältnis wie 11 zu 14.“ 3) „Der Umfang eines jeden Kreises ist dreimal so grofs als der Durchmesser und noch um etwas gröfser, nämlich um weniger als ein Siebentel aber um mehr als zehn Einundsiebenzigstel des Durchmessers.“

---

*) Siehe Bretschneider, pag. 97—124, woselbst, mit beigefügter Übersetzung, das ungemein wertvolle und interessante Referat aus des Eudemus (eines Schülers des Aristoteles) Geschichte der Geometrie mitgeteilt ist, welches Simplicius (im 6. Jahrh.) in seinem Kommentare zur aristotelischen Physik verfafst hat.

**) Immerhin darf darauf aufmerksam gemacht werden, dafs von der Zeit Platons (429—348) an, die Einsicht sich bei den Mathematikern zu befestigen begann, dafs die Quadratur des Zirkels eine mit Zirkel und Lineal auszuführende Aufgabe sei. (Vergl. Cantor I., 201—202 und Hankel, pag. 156.)

***) Über das Leben des Archimedes findet man Auskunft in: Heiberg, Quaestiones Archimedeae (Kopenhagen 1879), oder: Cantor I., pag. 253—254.

Da die Abhandlung in dem vorliegenden Buche vollständig zum Abdrucke kommt, so können wir uns an dieser Stelle auf eine kurze Charakteristik beschränken. Den ersten Satz beweist Archimedes indirekt, indem er mittels eingeschriebener resp. umgeschriebener Vielecke von hinreichend vielen Seiten zeigt, dafs die Annahme, der Kreis sei gröfser resp. kleiner als das in Rede stehende Dreieck, jedesmal zu einem Widerspruche führt. Der zweite Satz stützt sich auf den dritten, der zu den bewunderungswürdigsten mathematischen Leistungen des ganzen Altertumes zu rechnen ist. Archimedes bestimmt der Reihe nach die Seite des umgeschriebenen Sechsecks, des Zwölfecks, des Vierundzwanzigecks, des Achtundvierzigecks und des Sechsundneunzigecks, ausgedrückt durch den Durchmesser, und zwar giebt er mit feinem mathematischen Gefühle das (immer nur näherungsweise bestimmbare) Verhältnis des Durchmessers zur Seite des umgeschriebenen Polygones jedesmal etwas zu klein an, um für den Umfang des betreffenden Polygones und folglich umsomehr für den Umfang des Kreises eine sichere obere Grenze zu gewinnen. Die numerischen Rechnungen, welche Archimedes hierbei anzustellen hatte, fordern umsomehr unsere Bewunderung heraus, als es sich doch wiederholt um das Ausziehen von Quadratwurzeln handelt, deren Ermittlung zu einer Zeit, die mit dem indischen Ziffersystem und der Dezimalbruchrechnung noch unbekannt war, Schwierigkeiten darbot, von denen man sich heutzutage nur schwer eine Vorstellung bilden kann.

Um eine untere Grenze für das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser festzustellen, bedient sich Archimedes der entsprechenden eingeschriebenen Polygone, mit dem Sechseck beginnend und mit dem Sechsundneunzigeck abschliefsend. Bei diesen Berechnungen aber wählt Archimedes mit derselben bewufsten Sicherheit die auftretenden Quadratwurzelwerte jedesmal so, dafs die betreffende Polygonseite etwas zu klein angegeben wird. Auf diese Weise erhält er für den Umfang des betreffenden Polygones und folglich umsomehr für den Umfang des Kreises eine sichere untere Grenze*).

*) Weder in der Abhandlung des Archimedes selbst, noch in dem Kommentare, welchen Eutokius von Askalon (im 6. Jahrhundert) zu der

Die von Archimedes für die Zahl π angegebene obere Grenze $3\frac{1}{7}$ kommt zwar dem wahren Werte von π nicht so nahe als die von ihm gefundene untere Grenze $3\frac{10}{71}$ (es ist nämlich: $3\frac{1}{7} = 3{,}14285\ldots$; $\pi = 3{,}14159\ldots$; $3\frac{10}{71} = 3{,}14084\ldots$), sie wird indessen ihrer grofsen Einfachheit halber noch heute vielfach da benutzt, wo es sich nur um eine mittlere Genauigkeit handelt; die von Archimedes geschaffene Methode aber, den Kreisumfang mittels eingeschriebener und umgeschriebener Polygone zu berechnen, blieb bis zur Ausbildung der Differenzial- und Integralrechnung, also fast zwei Jahrtausende hindurch, mafsgebend.

Unter den späteren griechischen Mathematikern, welche sich, wie z. B. Heron von Alexandrien (ums Jahr 100 v. Chr.), bald des Wertes $3\frac{1}{7}$ für das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser, bald auch des einfacheren (babylonischen) Wertes 3 bedienten, haben wir an dieser Stelle nur noch zweier Männer zu gedenken: des Hipparch, des „Vaters der Astronomie“ (ungefähr 180—125 v. Chr.), der die erste, leider verloren gegangene, Sehnentafel berechnete und dadurch der Begründer der mit der Kreismessung in so engem Zusammenhange stehenden Trigonometrie wurde, und des grofsen Klau-

---

Kreismessung geschrieben hat, finden sich Andeutungen über die Art und Weise, wie Archimedes die Quadratwurzeln ausgezogen hat. So verschieden aber auch diese Frage beantwortet ist, so treffen doch fast alle Erklärungsversuche in dem Bestreben zusammen, die Methode des Archimedes in Verbindung mit dem modernen Kettenbruchverfahren zu bringen. Vgl. hierüber: Nesselmann, Die Algebra der Griechen, pag. 108 u. flg.; S. Günther, Antike Näherungsmethoden im Lichte moderner Mathematik (Abhandl. der k. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, Prag 1878); Heiberg, Quaestiones Archimedeae, pag. 60—66; Cantor I., pag. 272—274; Paul Tannery, Sur la mesure du cercle d'Archimède (Mém. de la soc. des sciences phys. et nat. de Bordeaux, T. IV, 1882); Günther, Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwicklungsmethoden (Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik 1882). Diese letztere Abhandlung enthält zugleich die umfangreiche Litteratur über die genannte Frage.

dius Ptolemäus (ungefähr 87—165 n. Chr.)*). Was jener begonnen, das führte dieser zu Ende. Ausgehend von dem nach ihm benannten Lehrsatze vom Sehnenvierecke, demzufolge in jedem eingeschriebenen Vierecke das Produkt aus den Diagonalen gleich der Summe der Produkte aus je zwei einander gegenüberliegenden Seiten ist, und mit Benutzung einiger bekannter Sehnen, nämlich der Seiten der regulären Polygone von 3, 4, 5, 6 und 10 Seiten berechnete Ptolemäus in seinem unsterblichen Werke *μεγάλη σύνταξις* (die grofse Zusammenstellung) eine Sehnentafel, aus welcher man die Sehnen aller von $\frac{1}{2}^0$ zu $\frac{1}{2}^0$ fortschreitenden Bogen für den ganzen Halbkreis entnehmen konnte und schuf, daran anschliefsend, „für den astronomischen Gebrauch eine Trigonometrie von so vollendeter Form, dafs sie weit über ein Jahrtausend nicht überboten wurde und nicht weniger als die unter dem Namen des ptolemäischen Weltsystems bekannte Lehre von den Bewegungen der Gestirne aber mit besserem Erfolge die Wissenschaft beherrschte“**).

Aber auch für das Problem von der Quadratur des Zirkels direkt ist der Name des Ptolemäus von Interesse, denn dieser Gelehrte ist der erste, welche für die Zahl π einen noch genaueren Wert benutzt als Archimedes. Es ist der in dem ptolemäischen Sexagesimalsystem durch 3 8′ 30″ dargestellte Wert, d. h. 3 und $\frac{8}{60}$ und $\frac{30}{3600}$ oder $3\frac{17}{120} = 3{,}14166\ldots$***).

§ 6. Die Römer, Inder und Chinesen.

Über die Römer kann unsere Darstellung rasch hinweggehen, sie haben das Problem der Kreismessung in keiner

*) Für Hipparch und Ptolemäus siehe namentlich: Wolf I. pag. 163—165, sowie Cantor I., pag. 312—313 und 350—360.

**) Cantor I., pag. 350.

***) Siehe Bd. I., pag. 421 der sorgfältigen, kritischen Ausgabe (mit französischer Übersetzung) von Halma, Paris, 1813—1816. Die Übersetzung der betreffenden Stelle lautet: „. . . en supposant que le rapport des circonférences aux diamètres est celui de 3 8′ 30″ à 1; car ce rapport tombe entre le triple joint à un septième et le triple joint à dix soixante-onzièmes, dont Archimède s'est servi pour plus de simplicité.“

Weise gefördert. Einem Volke, welches für wissenschaftliche mathematische Spekulationen so schlecht beanlagt war wie das römische, genügten auch für die Bedürfnisse der Praxis vollständig die vorhandenen Näherungswerte für π. Aber dafs auch selbst diese, namentlich der archimedische $3\frac{1}{7}$, nicht allen vertraut waren, beweist der Umstand, dafs der bekannte Architekt Vitruvius sich (ums Jahr 14 v. Chr.) des zwar bequemeren aber auch weit ungenaueren Wertes $3\frac{1}{8} = 3{,}125$ bediente.

Von ganz anderem mathematischen Range waren dagegen die Inder*). Schon Âryabhaṭṭa (geb. 476 n. Chr.) kannte für die Zahl π das Verhältnis $\frac{62832}{20000} = \frac{31416}{10000} = 3{,}1416$. Demselben Werte begegnen wir auch in der Form $\frac{3927}{1250}$ bei Bhâskara (geb. 1114 n. Chr.), welcher in seinem Werke Siddhântaçiromaṇi (die Krönung des Systems) und speziell in dem die Arithmetik behandelnden Kapitel Lîlâvatî (die Reizende) jenen Wert als den „genauen“, im Gegensatze zu dem „ungenauen“ $\frac{22}{7}$ bezeichnet. Gaṇeça, der Commentator Bhâskara's, belehrt uns darüber, wie der in der That überraschend genaue Wert erhalten wurde. Mittels der Formel:

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}},$$

durch welche aus der Seite s_n des eingeschriebenen n-Ecks die Seite s_{2n} des eingeschriebenen $2n$-Ecks erhalten wird, berechnete man successive den Umfang der Polygone von 12, 24, 48, 96, 192 und 384 Seiten. Wird der Durchmesser des Kreises gleich 100 gesetzt, so erhält man für den Umfang des 384-Ecks schliefslich den Wert $\sqrt{98694}$, welcher in der That zu dem Werte Âryabhaṭṭa's führt.

Ein sehr merkwürdiger Wert, der den Indern durchaus

*) Die mathematischen Leistungen der Inder sind uns namentlich durch die sehr verdienstvolle Übersetzung Colebrooke's zugänglich geworden: „Algebra with arithmetic and mensuration, from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhâskara translated by H. Th. Colebrooke. London, 1817.“

eigentümlich ist, findet sich bei dem Mathematiker Brahmagupta (geb. 598 n. Chr.). Dieser giebt nämlich als rohen Wert $\pi = 3$ und als genaueren $\pi = \sqrt{10}$. Hankel schlägt für diesen höchst merkwürdigen Wert folgende Erklärung vor: „In älteren Zeiten, wo gröfsere numerische Rechnungen, namentlich Wurzelausziehungen noch schwierig und unbequem waren, bemerkte man, dafs der Umfang des 12, 24, 48, 96-Ecks durch die Reihe aufsteigender Zahlen $\sqrt{965}$, $\sqrt{981}$, $\sqrt{986}$, $\sqrt{987}$ bei einem Durchmesser 10 dargestellt wird; der Umfang des Kreises würde gefunden werden, wenn man in dieser aufsteigenden Reihe ohne Ende fortginge; dabei wird sich die Zahl unter dem Wurzelzeichen immer mehr dem Werte 1000 nähern und daher $\sqrt{1000}$ nahezu als der Umfang angesehen werden können“*).

Endlich möge noch die indirekte Förderung kurz erwähnt werden, welche das Problem von der Quadratur des Zirkels den Indern dadurch verdankte, dafs dieselben in die Trigonometrie eine sehr glückliche und folgenschwere Neuerung einführten. Die Inder haben nämlich niemals, wie die Griechen, mit der ganzen Sehne eines Bogens gerechnet, sondern stets mit der halben Sehne, welche sie dann in Beziehung zu dem halben Bogen setzten, d. h. sie rechneten von Anfang an mit dem Sinus eines gegebenen Bogens statt mit der Sehne desselben und ersetzten dementsprechend die Sehnentafeln der Alten durch Sinustafeln. Bhâskara ging sogar soweit, dafs er auf Grund der von ihm gegebenen Formeln:

$$\sin 1^0 = \frac{10}{573}, \quad \cos 1^0 = \frac{6568}{6569},$$

die nur um einige Zehnmillionstel von dem wahren Werte abweichen, also die ptolemäischen an Genauigkeit weit übertreffen, eine Sinustabelle berechnen lehrte, deren Bogen von 1^0 zu 1^0 fortschreiten**).

Bei den Chinesen, die in ihrem Nationalstolze den Anspruch erheben, dafs „alle Wissenschaft von Ursprung an chinesisch und aus ihrem Lande vor alters den Fremden zugekommen, im Mutterlande aber verloren gegangen sei durch

*) Hankel, pag. 216—217. Siehe auch Cantor I., pag. 551 und 556.
**) Hankel, pag. 218; Cantor I., pag. 560—562.

die allgemeine Bücherverbrennung, die der gewaltthätige Kaiser Schì-hoâng-tí im Jahre 212 v. Chr. anbefahl und durchführte"*), finden wir in den ältesten Zeiten ausschliefslich den babylonischen Wert $\pi = 3$. Erst der im 6. Jahrhundert lebende Schriftsteller Tsu tschung tsche erwähnt das genauere Verhältnis $\frac{22}{7}$ und der ungefähr gleichzeitig lebende Liu hwuy benutzt den sonderbaren Wert $\frac{157}{50}$, der übrigens weniger genau als $\frac{22}{7}$ ist. Von einer Förderung unseres Problemes durch die Chinesen kann also nicht wohl die Rede sein**).

§ 7. Die Araber und die christlichen Völker des Mittelalters.

Um so gröfsere Beachtung verdienen dagegen die mathematischen Leistungen der Araber. Weniger mit Rücksicht auf eigene Originalarbeiten, obwohl auch in dieser Beziehung manches hervorragende Werk zu verzeichnen sein wird, als vielmehr ganz besonders im Hinblick auf die universelle kulturgeschichtliche Bedeutung dieses Volkes. Verdankt doch den Arabern das christliche Abendland in gleicher Weise die erste Kenntnis der mathematischen Kultur der Griechen wie derjenigen der Inder!

Kaum war das grofse arabische Weltreich errichtet und die arabische Sprache zur Litteratursprache geworden, so begann, insbesondere unter den Kalifen Hârûn Arraschîd und Almamûn, jene fruchtbare Übersetzungsthätigkeit, durch welche so manches kostbare Werk dem Untergange entrissen wurde.

Die ersten mathematischen Schriften, welche aus dem Griechischen in das Arabische übersetzt wurden, waren die *σύνταξις* des Ptolemäus, die Elemente des Euklid, die Kegelschnitte des Apollonius und — was uns hier besonders interessiert — die Abhandlungen des Archimedes über die Kreismessung und über Kugel und Cylinder. Bei dieser Gelegenheit entstand auch

*) Hankel, pag. 410.

**) In bezug auf die Mathematik der Chinesen siehe namentlich die Abhandlung von Biernatzki im 52. Bande von Crelle, sowie Cantor I., pag. 565—589 und Hankel, pag. 405—410.

der für das ptolemäische Werk noch heute übliche Name „Almagest“, hervorgegangen aus dem arabischen Artikel al und dem griechischen Superlativ μεγίστη, in welche die μεγάλη (σύνταξις) allmählich übergegangen war.

In gleicher Weise aber wufsten sich die Araber, deren Reich sich ja bis zum Indus erstreckte, auch die Werke der indischen Mathematiker durch Übersetzungen anzueignen. In der That finden wir bei dem ältesten und zugleich bedeutendsten arabischen Mathematiker, bei Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî, der im Anfange des neunten Jahrhunderts unter dem Kalifen Almamûn lebte und dessen Name sich noch in dem Worte „Algorithmus“ erhalten hat, neben der griechischen Verhältniszahl $3\frac{1}{7}$, welche Alchwarizmî als die in der Praxis anzuwendende bezeichnet, auch die beiden indischen Werte für π wieder, nämlich $\pi = \sqrt{10}$ und $\pi = \frac{62832}{20000}$, die auch ausdrücklich von ihm als indischen Ursprungs bezeichnet werden*). Aber auch einer besonderen Abhandlung über die Quadratur des Kreises begegnen wir in der arabischen Litteratur. Es ist dies eine von dem Mathematiker Ibn Alhaitam (derselbe wurde geboren in Al Basṛa, wanderte nach Ägypten ein und starb 1038) herrührende, in einem Vatikancodex noch vorhandene Abhandlung**), „von welcher ungemein zu bedauern ist, dafs sie noch keinen Bearbeiter gefunden hat, weil sie die erste Abhandlung dieses Titels seit Archimed ist, von deren Erhaltung wir Kenntnis haben, und weil nach der Bedeutung

*) Das im Jahre 820 geschriebene Werk Alchwarizmî's trägt den Titel: „Al ǵebr w' al muḳâbala. Das Wort „ǵebr“ bedeutet so viel als „Wiederherstellung“ (restauratio) d. h. das Versetzen eines negativen Gliedes einer Gleichung auf die andere Seite. Das Werk Alchwarizmî's ist das erste, in welchem sich der Ausdruck al ǵebr, der den Ursprung des Wortes „Algebra“ bezeichnet, vorfindet. Siehe Hankel, pag. 260 und 271; Cantor I., pag. 616 und 625.

**) Abgesehen von dieser Abhandlung, von deren Vorhandensein wir genaue Kenntnis haben, berichtet übrigens das neuerdings von H. Suter deutsch herausgegebene, aufserordentlich interessante „Mathematikerverzeichnis im Fihrist des Ibn Abî Ja'ḳûb an-Nadîm“ (Abh. zur Gesch. der Math. VI.) noch von verschiedenen arabischen Mathematikern, welche über die Kreismessung geschrieben haben.

des Verfassers zu urteilen, sicherlich interessante Versuche darin zu erwarten sind, dem Werte der Kreisfläche so nahe als möglich zu kommen"*).

Nicht unerwähnt darf ferner an dieser Stelle bleiben, dafs namentlich Alchwarizmî es war, der seinen Landsleuten das indische Zifferrechnen zugänglich machte, welches dann von den Arabern mit Beginn des dreizehnten Jahrhunderts, insbesondere durch die Bemühungen des grofsen Leonardo Pisano, genannt Fibonacci, des unstreitig bedeutendsten Mathematikers des ganzen christlichen Mittelalters, dem Abendlande überliefert wurde. Wie wollte man sich etwa die Ludolf'sche Berechnung der Zahl π ohne das indische Ziffersystem vorstellen!**)

Und endlich ist der grofsen Fortschritte zu gedenken, welche die Trigonometrie den Arabern verdankt. Angeregt durch die goniometrischen Arbeiten der Inder berechnete Albattânî (von den Übersetzern Albategnius genannt) in den Jahren 878 bis 918 zum Zwecke astronomischer Messungen die erste Kotangententafel. Er beobachtete nämlich die Länge l des Schattens, welchen ein vertikaler Stab von der Länge r auf eine horizontale Fläche warf. Bezeichnet φ die Höhe der Sonne, so hat man $l = r \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$. Nun berechnete Albattânî für $r = 12$ und für $\varphi = 1^0, 2^0, 3^0, \ldots$ die Länge l des Schattens (umbra recta) und erhielt auf diese Weise eine Tafel, aus welcher er dann umgekehrt aus der beobachteten Schattenlänge l die Höhe φ der Sonne entnehmen konnte.

Einen weiteren folgenreichen Schritt that Abû 'l Wafâ (geb. 940). Statt der „umbra recta", d. h. des von einem vertikalen Gnomon auf eine horizontale Ebene geworfenen Schattens, führte er die sogenannte „umbra versa" ein, nämlich die Länge des von einem horizontalen Stabe r auf die ihn tragende vertikale Wand geworfenen Schattens $l = r \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$. So führte

*) Cantor I., pag. 679.

**) Grade die hohe Vollkommenheit des indischen Zifferrechnens macht es erklärlich, dafs die Inder bei der Bestimmung der Zahl π die Griechen an Genauigkeit so weit übertreffen konnten.

er, als der Erste, die Tangente in die Trigonometrie ein und berechnete für $r = 60$ eine Tangententafel. Dabei definiert er die neue Winkelfunktion so: „Die umbra eines Bogens ist eine Linie, welche von dem Anfangspunkte des Bogens parallel dem Sinus geführt wird, in dem Intervalle zwischen diesem Anfange des Bogens und einer von dem Mittelpunkte des Kreises nach dem Ende des Bogens gezogenen Linie.... So ist die umbra die Hälfte der Tangente des doppelten Bogens, welche enthalten ist zwischen den zwei Geraden, welche vom Mittelpunkte des Kreises nach den Endpunkten des doppelten Bogens geführt werden.“ Mit Leichtigkeit weifs er sodann alle die Relationen abzuleiten, welche zwischen den Funktionen $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{ctg}\varphi$, $\sec\varphi$, $\operatorname{cosec}\varphi$ bestehen*).

Unter den übrigen arabischen Mathematikern, die sich um die Ausbildung der Trignometrie verdient gemacht haben, erwähnen wir noch Ibn Jûnus von Kairo (gest. 1008), namentlich aber den im 11. Jahrhundert in Sevilla lebenden Ibn Aflaḥ, auch Geber genannt, der die nach ihm benannte Fundamentalformel $\cos\beta = \cos b \sin\alpha$ für das rechtwinklige sphärische Dreieck (Geber'scher Lehrsatz) zuerst aufstellte und sich überdies von allen übrigen arabischen Astronomen dadurch unterschied, dafs er zu den von ihm aufgestellten Sätzen vollständige Beweise gab**).

Wenden wir uns nunmehr zu den Völkern des christlichen Mittelalters, so können wir über die Zeit von der Völkerwanderung bis zum Ausgange des 10. Jahrhunderts mit Stillschweigen hinweggehen. Nicht nur hat das Problem von der Quadratur des Zirkels keinerlei Fortschritte aufzuweisen, sondern es ist überhaupt in dieser Zeit bei den christlichen Völkern des Abendlandes von mathematischer Forschung nicht viel die Rede. War doch die gelehrte Bildung dieser Zeit eine wesentlich lateinische und daher auch die Kenntnis der Mathematik ausschliefslich abhängig von der, wie wir gesehen haben, sehr unbedeutenden mathematischen Bildung der Römer! Erst

*) Hankel, pag. 280—285; Cantor I., pag. 632—642; Wolf I., pag. 165—169.

**) Hankel, pag. 285—287.

durch den unermüdlichen und vortrefflichen Gerbert, den „reparator studiorum“ (derselbe wurde in der ersten Hälfte des 10. Jahrhunderts zu Aurillac in der Auvergne geboren, übernahm nach einer Studienreise in die spanische Mark eine Lehrerstelle an der Klosterschule zu Rheims und bestieg im Jahre 999 den päpstlichen Stuhl unter dem Namen Sylvester II.; er starb im Jahre 1003) begannen, wenn auch zunächst nur sehr langsam, die mathematischen Studien wieder aufzublühen. Bald nach seinem Tode begegnen wir auch zum ersten Male auf christlichem Boden dem Probleme von der Quadratur des Zirkels: Franco von Lüttich verfafste (zwischen 1036 und 1055) ein dem Erzbischofe Hermann II. von Köln gewidmetes Werk in 6 Büchern über die Quadratur des Zirkels, welches Werk neuerdings von Winterberg herausgegeben worden ist*).

Regeres Leben entfaltete sich im zwölften und dreizehnten Jahrhundert, als die Vertreter der lateinischen Bildung anfingen, die hohen Schulen von Toledo, Sevilla, Cordova und Granada zu besuchen, um die griechischen Klassiker kennen zu lernen und sie aus dem Arabischen in das Lateinische zu übertragen. So übersetzte, um nur einiges herauszugreifen, Gerhard von Cremona im Jahre 1175 den Almagest und die Algebra des Alchwarizmî, Atelhart von Bath die Elemente des Euklid sowie die astronomischen Werke Alchwarizmî's, Plato von Tivoli die Werke des Albattânî u. s. w. Die Übersetzung Albattânî's durch Plato von Tivoli ist noch dadurch von besonderem Interesse, dafs in derselben zum ersten Male das Wort sinus im trigonometrischen Sinne vorkommt. Die Erklärung für diesen Ausdruck ist folgende. Bei den Indern wurde die Sehne eines Bogens jyâ oder jîva genannt, welche beiden Wörter auch die Sehne eines zum Schiefsen bestimmten Bogens bezeichnen. Die halbe Sehne, d. h. die Linie, welche später als sinus bezeichnet wurde, nannten sie dementsprechend jyârdha oder ardhajyâ. Da aber, wie wir wissen, die Inder überhaupt nur mit der halben Sehne rechneten, so benutzte man der Kürze halber allmählich auch für diese das Wort jîva, welches dann auf die Araber überging und von diesen, seinem

*) Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik (1882).

Wortlaute entsprechend, dschîba geschrieben wurde. Genau dieselben Konsonanten aber, welche arabisch dschîba zu lesen sind, ein Wort, welches für die Araber keine Bedeutung hatte, lassen auch die Lesung dschaib zu, welches ein wirkliches arabisches Wort ist und soviel bedeutet wie Einschnitt oder Busen. Diese letztere Lesung wurde schliefslich die regelmäfsige, sodafs Plato von Tivoli das Wort dschaib ganz richtig durch sinus übersetzte, ein Ausdruck, der nun allgemein angenommen wurde*).

Den ersten genaueren Angaben über die Zahl π begegnen wir erst bei dem Manne, dessen wir bereits oben als des weitaus bedeutendsten Mathematikers des ganzen christlichen Mittelalters gedacht hatten, bei Leonardo Pisano. Derselbe wurde am Ende des 12. Jahrhunderts einem Schreiber zu Pisa, der den Beinamen Bonaccio führte, geboren. Nach grofsen Reisen, die er nach Ägypten, Syrien, Griechenland und der Provence unternahm, kehrte Leonardo nach Pisa zurück, wo er im Jahre 1202 sein berühmtes Werk „Liber Abaci“ schrieb. Ein Freund Kaiser Friedrich's II., der ihn in Pisa an seinen glänzenden Hof zog, starb er um das Jahr 1228. Das Werk, welches uns hier speziell interessiert, führt den Titel Practica geometriae und ist im Jahre 1220 geschrieben. In demselben führte er unter anderem die Rektifikation des Kreises mittels eingeschriebener und umgeschriebener Polygone aus und zwar auf bedeutend kürzerem Wege als Archimedes. Indem er ebenfalls bei dem 96-Eck stehen blieb, fand er überdies die engeren Grenzen

$$\frac{1440}{458\frac{1}{3}} = 3{,}1427\ldots \quad \text{und} \quad \frac{1440}{458\frac{4}{9}} = 3{,}1410\ldots,$$

während die Grenzen des Archimedes $3\frac{1}{7} = 3{,}1428\ldots$ und $3\frac{10}{71} = 3{,}1408\ldots$ waren. Aus jenen Grenzen wählte Leonardo als Mittelwert $\frac{1440}{458\frac{1}{3}}$, was dem Werte $\pi = 3{,}1418\ldots$ entspricht**).

*) Cantor I., pag. 560 und 632; Hankel, pag. 280—281.

**) Siehe: Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo pubblicati da B. Boncompagni (Roma 1857—62) II., pag. 87—90. Ferner: Cantor II., pag. 34; Hankel, pag. 345.

§ 8. Die Zeit der Renaissance*).

Wie Leonardo als ein glänzendes Meteor bezeichnet worden ist, das auftaucht und wieder verschwindet, so erscheint, wenn wir speziell an das Problem von der Quadratur des Zirkels denken, die von Leonardo ausgeführte Kreisrektifikation als ein singulärer Punkt in der Entwicklung dieses Problems. Denn mehr als zwei Jahrhunderte — insofern wir nämlich den Blick nur auf wirklich mathematische Untersuchungen und nicht auch auf scholastische Spielereien richten — müssen wir durcheilen, bis wir wieder von einer direkten oder indirekten Förderung unseres Problems sprechen können. Galt doch selbst Männern, wie Johannes Campanus von Novarra (in der zweiten Hälfte des dreizehnten Jahrhunderts) und Albert von Sachsen (gest. 1390) der Wert $\pi = 3\frac{1}{7}$ nicht als ein Näherungswert, sondern als die genau richtige Verhältniszahl!**)

Erst Georg von Peurbach (1423—1461), der ausgezeichnete Astronom und vortreffliche Humanist an der (1365 gegründeten) Wiener Universität, vermag unser Interesse wieder zu fesseln. Zunächst war er durchaus vertraut mit allem dem, was in bezug auf die Kreismessung bisher geleistet worden war. Er kannte die von Archimedes gefundenen Grenzen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$, er wufste, dafs Ptolemäus sich des Wertes $\frac{377}{120}$ bedient hatte und dafs die Inder die Werte $\sqrt{10}$ und $\frac{62832}{20000}$ gefunden hatten. Er war sich aber auch wohl bewufst, dafs dies alles nur Näherungswerte seien, und zweifelte vielmehr daran, dafs überhaupt ein angebbares Verhältnis zwischen dem Kreisumfange und dem Durchmesser existiere. Gröfser aber ist der indirekte Anteil, den Peurbach an der Förderung unseres Pro-

---

*) In bezug auf die Zeit der Renaissance siehe: Rudio, Über den Antheil der mathematischen Wissenschaften an der Kultur der Renaissance. (Heft 142 der Sammlung von Virchow und Wattenbach, Hamburg 1892.)

**) H. Suter, Der Tractatus de quadratura circuli des Albertus de Saxonia (Hist.-litt. Abt. der Zeitschr. für Math. und Physik. Bd. 29).

blemes nahm, durch Ausbildung der trigonometrischen Hülfsmittel. Ihm genügte nicht mehr die Genauigkeit, welche die trigonometrischen Tafeln der Araber boten. Er konstruierte daher eine neue Sinustafel, in welcher er den Kreisradius gleich 60000 wählte und in der die Bogen von 10′ zu 10′ zunahmen*).

Dem Kardinal Nikolaus von Cusa**) (1401—1464) gebührt das Verdienst, die Aufmerksamkeit weiterer Kreise wieder auf das Problem von der Quadratur des Zirkels gelenkt zu haben. In den Jahren 1450—1460 bemühte er sich in verschiedenen Abhandlungen um die Aufgabe der Arkufikation der Geraden. Er stellte sich nämlich die Aufgabe, von einem gegebenen gleichseitigen Dreiecke allmählich überzugehen zu regelmäfsigen Vielecken von gleichem Umfange aber immer gröfserer Seitenzahl, um schliefslich so zu einem Kreise gleichen Umfangs zu gelangen, dessen Radius dann zu bestimmen war. In einem Briefe an den bekannten Arzt und Naturforscher Paola Toscanelli teilte er eine, nach seiner Meinung genaue, Lösung dieser Aufgabe mit. Die von ihm gegebene Konstruktion ist natürlich nur angenähert richtig, immerhin ist die Annäherung keine unbedeutende, denn die nachträgliche Berechnung des Wertes von π, dem die Konstruktion entspricht, liefert $\pi = 3{,}1423\ldots$, während $3\frac{1}{7} = 3{,}1428\ldots$ ist. Von viel geringerer Genauigkeit sind dagegen die eigentlichen Quadraturen und Rektifikationen, welche der gelehrte Kardinal veröffentlichte. Bereits 1464 wies Regiomontanus in einer Streitschrift***) gegen Cu-

*) Cantor II., pag. 167—168; Wolf I., pag. 170.

**) In bezug auf diesen vielseitigen und anregenden Gelehrten, der auch mit Peurbach und Regiomontan in lebhaftem Verkehre stand, siehe: Schanz, Der Cardinal Nicolaus von Cusa als Mathematiker (Programm des Gymnasiums in Rottweil, 1871—72); ferner Cantor II., pag. 170—187. Cusa's Werke wurden 1565 in Basel herausgegeben.

***) Diese sehr interessante, zum Teil in Dialogen gehaltene und mit allem Detail der erforderlichen Rechnungen ausgestattete Schrift wurde 1533 von Johann Schöner in Nürnberg unter dem Titel „De quadratura circuli" herausgegeben und zwar als Anhang zu Regiomontans berühmtem Werke „De triangulis omnimodis libri quinque", welches von Wilibald Pirckheimer angekauft und vor dem Untergange bewahrt worden war.

sanus nach, dafs die dabei zu Grunde liegenden Werte von π zum Teil nicht einmal zwischen die von Archimedes gegebenen Grenzen fallen und er liefs an einer Stelle die von einem leisen Anfluge von Ironie wohl nicht ganz freie Bemerkung einfliefsen, dafs er die Beweise des Cusanus wohl als philosophische, aber nicht als mathematische könne gelten lassen*).

Regiomontanus**) (Johannes Müller, geb. 1436 in dem fränkischen Städtchen Königsberg, gest. 1476 in Rom), „der thatkräftigste Reformator der exakten Wissenschaften des 15. Jahrhunderts", nimmt in der Geschichte der Mathematik und namentlich in der Geschichte der Trigonometrie, welche von ihm zuerst zu einer selbstständigen Wissenschaft erhoben wurde, einen so hervorragenden Rang ein, dafs wir noch einen Augenblick bei ihm verweilen müssen. Er hat (in seinem Werke „De triangulis") zuerst gezeigt, dafs man aus den drei Winkeln eines sphärischen Dreiecks die drei Seiten berechnen könne, er hat die Aufgabe, die sich bereits sein Lehrer und Freund Peurbach gestellt hatte, nämlich genaue Sinustafeln herzustellen, um ein Bedeutendes gefördert, indem er Tafeln berechnete, die von 1′ zu 1′ fortschreiten und in denen er den Radius anfangs gleich 600 000 wählte, um dann in einer zweiten Tafel, in welcher er den Radius sogar auf 10 000 000 erhöhte, zum ersten Male von dem Sexagesimalsystem zu dem Dezimalsystem überzugehen. Aufser diesen Sinustafeln berechnete aber Regiomontanus auch noch eine von 1^0 zu 1^0 fortschreitende Tangententafel, in welcher er ebenfalls, mit vollem Bewufstsein, dadurch einen Fortschritt zu vollziehen, statt des Sexagesimalsystems das Dezimalsystem zu Grunde legte und den Radius

---

*) Siehe pag. 25 der genannten Schrift „de quadratura circuli", oder auch Cantor II., pag. 253.

**) In bezug auf das Leben und die Werke von Regiomontanus siehe: J. G. Doppelmayr, Historische Nachricht von den Nürnbergischen Mathematicis und Künstlern (Nürnberg 1730), pag. 1—23. Ferner M. A. Stern, Joannes de Monteregio (Ersch-Gruber's Encyclop. 22. Teil); S. Günther, Müller Johannes (Allg. deutsche Biogr. Bd. 22); Cantor II., pag. 232—265; Wolf I., pag. 169—171; endlich den oben citierten Aufsatz des Verf. „Über den Antheil der mathematischen Wissenschaften an der Kultur der Renaissance".

gleich 100 000 setzte. Diese „Tabula foecunda“ — so nannte Regiomontanus seine Tangententafel — fordert unsere Bewunderung um so mehr heraus, als ihm, wie überhaupt der damaligen Zeit, die Arbeiten Albattânî's und Abû 'l Wafâ's vollständig unbekannt waren, sodafs Regiomontanus die Tangente gewissermafsen zum zweiten Male entdeckte und in die Trigonometrie einführte, aus der sie nun nicht wieder verschwand.

Die weitere Verwertung der von Peurbach und Regiomontanus gegebenen Anregungen, nämlich die Herstellung noch ausgedehnterer und genauerer Tafeln und den damit zusammenhängenden Ausbau der Trigonometrie, verdankt man namentlich Koppernikus (1473—1543), der die Sekante in die Wissenschaft einführte*), Rhäticus (1514—1576), dem Freunde und Schüler des Koppernikus, Pitiscus (1561—1613), Joost Bürgi (1552—1632), der die erste Logarithmentafel herstellte und Napier (1550—1617), der, unabhängig von Bürgi und fast gleichzeitig mit diesem, ebenfalls die Logarithmen entdeckte; ferner den gleichfalls um die logarithmische Rechnung hochverdienten Mathematikern Briggs (1556—1630) und Vlacq (1600—1667) und namentlich auch Johannes Kepler (1571—1630). Auf alle diese können wir hier nur kurz hinweisen, um uns nicht allzu sehr von unserem Thema zu entfernen**).

Kehren wir zu dem Probleme von der Quadratur des Zirkels zurück, so haben wir aus der Zeit der Renaissance kurz noch folgende Erscheinungen zu erwähnen***). Luca Paciuoli (ungef. 1445—1514), als Mitglied des Franziskanerordens Fra Luca di Borgo genannt, berechnete in seinem Werke „Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita“ ähnlich wie Archimedes mit Hülfe des 96-Eckes die Verhältniszahl $3\frac{1}{7}$. Sein unsterblicher Freund Lionardo da Vinci (1452—1519) stellte die Quadratur des Kreises da-

*) Cantor II, pag. 433—434.

**) In bezug auf die Genannten siehe die ausführliche Darstellung in Wolf I., pag. 68—75 und 169—175. Von Vieta, der hier auch zu nennen gewesen wäre, wird noch weiter unten besonders die Rede sein.

***) Cantor II, pag. 303; 276—277; 427; 352—354; 344—348; 356—358.

durch her, dafs er ein Rad, dessen Dicke dem halben Radius gleich ist, ganz umrollen liess; die zurückgelassene Spur war dann der Kreisfläche des Rades gleich. Albrecht Dürer (1471—1528), der gleich Lionardo einen Ehrenplatz in der Geschichte der mathematischen Wissenschaften einnimmt, giebt in seinem dem Nürnberger Mäcen Wilibald Pirckheimer*) (1470—1530) gewidmeten berühmten Werke „Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt“ den Näherungswert $\pi = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}$, dessen sich, wie wir uns erinnern, schon Vitruv bedient hatte.

Der französische Mathematiker Bouvelles (1470—1533) suchte die Quadratur des Kreises mit Hülfe eines rollenden Rades auszuführen und gab eine Konstruktion, welche auf den indischen Wert $\pi = \sqrt{10}$ hinauskommt. Daneben lehrte er, dafs der einem gegebenen Quadrate flächengleiche Kreis als Durchmesser $\frac{8}{10}$ der Diagonale habe, d. h. er setzte $\pi = 3\frac{1}{8}$.

Das gröfste Aufsehen aber erregte Orontius Finaeus (1494—1555), Professor an dem Collège royal zu Paris und zugleich einer der gefeiertsten Lehrer seiner Zeit, durch das nach seinem Tode im Jahre 1556 veröffentlichte Werk „De rebus mathematicis hactenus desideratis“, in welchem neben anderen ersehnten Dingen auch das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser angeblich mit alleiniger Benutzung von Zirkel und Lineal bestimmt wurde. Unter den von ihm aufgestellten Sätzen und Konstruktionen werden wir zweien in der Huygens'schen Abhandlung „De circuli magnitudine inventa“ (§ 14) begegnen; hier sei nur noch erwähnt, dafs Orontius Finaeus für π die durchaus brauchbaren Grenzen $\frac{22}{7}$ und $\frac{245}{78}$ gab, dann aber später den Näherungswert $\frac{245}{78}$ als genau richtig bezeichnete. Die Schrift des Orontius Finaeus rief bald eine Gegenschrift „De erratis Orontii Finaei“ hervor,

*) In bezug auf Albrecht Dürer und Wilibald Pirckheimer vergleiche die aufserordentlich interessante „Historische Nachricht von den Nürnbergischen Mathematicis und Künstlern“ von J. G. Doppelmayr, pag. 36—44, 153—155 und 182—190.

welche den portugiesischen Mathematiker und Kosmographen Pedro Nuñez oder Nonius (1492—1577), dessen Name noch heute mit der bekannten, richtiger Vernier genannten, Vorrichtung zum genauen Ablesen der Winkel verknüpft wird, zum Verfasser hatte und welche die Behauptungen des Pariser Gelehrten widerlegte.

Von den grofsen italienischen Mathematikern der Renaissance, welche auf Luca Paciuoli folgten, nämlich Scipione del Ferro (gest. 1526), Nicolo Tartaglia (1506—1559), Hieronimo Cardano (1501—1576) und Luigi Ferrari (1522—1565) scheint sich keiner direkt mit dem Probleme von der Quadratur des Zirkels beschäftigt zu haben; wohl aber dürfen ihre Namen hier genannt werden wegen der grofsen Verdienste, die sich diese Forscher um die Ausbildung der Theorie der algebraischen Gleichungen erworben haben, mit welcher unser Problem ja später in den engsten Zusammenhang treten sollte.

Endlich mögen noch einige litterarische Ereignisse erwähnt werden, welche zwar mit dem Probleme von der Quadratur des Zirkels nur in einem indirekten Zusammenhange stehen, die aber für die allgemeine mathematische Bildung ihrer Zeit eine zu grofse Bedeutung besafsen, um hier stillschweigend übergangen werden zu können. Im Jahre 1533 gab Simon Grynaeus*) (geb. 1493, gest. 1541 als Professor der Mathematik an der 1459 gegründeten Baseler Universität) die erste griechische Textausgabe des Euklid zu Basel heraus, im Jahre 1538 liefs er eine ebensolche des Almagest**) folgen und endlich veröffentlichte, gleichfalls zu Basel, im Jahre 1544 Thomas Ve-

*) Wolf, Biographieen zur Kulturgeschichte der Schweiz, Bd. 2. p. 10.

**) Diese dem Könige Heinrich VIII. von England gewidmete Ausgabe enthält zugleich den Kommentar des Theon, des Vaters der im Jahre 415 ermordeten ausgezeichneten Mathematikerin Hypatia. Der Ausgabe lag das Manuskript zu Grunde, welches der gelehrte Kardinal Bessarion (1395—1472), der Freund und Gönner Regiomontans, von Konstantinopel nach Rom gebracht hatte und welches von Peurbach und Regiomontan vielfach benutzt und von letzterem zum Drucke vorbereitet worden war. Siehe Wolf II., pag. 532—533, sowie die Vorrede zur Halma'schen Ausgabe des Almagest.

natorius (1480—1551) die erste vollständige Textausgabe des Archimedes mit hinzugefügter lateinischer Übersetzung und mit dem Kommentare des Eutokius*).

§ 9. Von dem Ausgange der Renaissancezeit bis zu der Erfindung der Differenzial- und Integralrechnung.

Die Renaissance der Wissenschaften hatte für die mathematischen Studien einen so allgemeinen Aufschwung zur Folge, dafs wir uns von jetzt an auf die Besprechung nur noch derjenigen Erscheinungen, die für unser Problem eine wesentliche Förderung bedeuten, werden beschränken müssen.

Der erste, dem es gelang, für das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser, d. h. für die Zahl π, einen Wert zu finden, der alle bisher bekannten an Genauigkeit bei weitem übertraf, war der holländische Mathematiker und Festungsingenieur Adriaan Anthoniszoon, genannt Metius. Der von ihm angegebene Wert ist $\frac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots$, weicht also erst in der 7ten Dezimalstelle von dem richtigen Werte ab. Wie Metius zu dieser Zahl gelangte**), die namentlich noch dadurch besonderes Interesse hat, dafs sie als Näherungsbruch bei der Verwandlung der Zahl π in einen Kettenbruch auftritt (die aufeinander folgenden Näherungsbrüche sind nämlich $\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \ldots$), darüber giebt uns sein

*) In bezug auf die Geschichte dieser Editio princeps, welcher Manuskripte aus der Regiomontan'schen und Pirckheimer'schen Hinterlassenschaft zu Grunde lagen, sowie in bezug auf die späteren Ausgaben des Archimedes siehe zunächst das Vorwort zu jener Baseler Ausgabe, sowie das oben citierte Werk von Doppelmayr (pag. 14, 15, 41, 51—52, 116, 170); ferner Heiberg, Quaest. Archim. cap. II. und cap. VI.; Heiberg, Neue Studien zu Archimedes (Zeitschr. für Math. u. Phys. 1890, Suppl.), sowie die Heiberg'sche Archimedausgabe, Bd. 3. Siehe auch die Anmerkung zu § 10 der in dem vorliegenden Buche abgedruckten Lambert'schen Abhandlung.

**) Siehe auch: Petri Vorsselman de Heer responsio ad quaestionem ab academia Groningana propositam: „Detur succincta expositio praecipuarum methodorum, quae ad circuli quadraturam ducunt" (Groningen 1832); ferner Wolf I, pag. 161—162.

Sohn Adrianus Metius (1571—1635), der in Franeker Professor der Mathematik war, Aufschlufs und zwar in seiner „Arithmeticae et Geometriae Practica (Franekerae 1611)“. Es hatte nämlich Simon Duchesne, ein französischer Mathematiker, der in Holland unter dem Namen Van der Eycke lebte, im Jahre 1584 die Behauptung aufgestellt, dafs der Kreis inhaltsgleich einem Quadrate sei, dessen Seite $\frac{39}{44}$ des Durchmessers betrage. Dies würde dem Werte $\pi = 3{,}1425\ldots$ entsprechen. Metius und Ludolf, von dem bald die Rede sein wird, suchten diesen Wert durch eine noch schärfere Bestimmung von π als einen nicht genau richtigen nachzuweisen. In dem genannten Buche erzählt nun Adrian II., es habe sein Vater P. M. (Piae Memoriae — nicht Peter Metius, wie oft gelesen wurde) nach der Methode des Archimedes für π die Grenzwerte $\frac{377}{120}$ und $\frac{333}{106}$ gefunden und dann sowohl aus den Zählern als aus den Nennern je das Mittel genommen*).

Einen ganz besonderen Platz in der Geschichte der Quadratur des Zirkels darf der grofse französische Mathematiker Vieta beanspruchen (François Viète, geb. 1540 zu Fontenay, war Advokat in Poitou; später begleitete er Henri IV. nach Paris, wo er im Jahre 1603 starb).

In seinen Untersuchungen über die Kreismessung**) ging er von dem folgenden Satze aus: Wenn man einem Kreise zwei reguläre Polygone einschreibt, von denen das erste halb so viele Seiten besitzt wie das zweite, so verhält sich der Flächeninhalt des ersten Polygons zu dem des zweiten wie die Supplementarsehne (apotome) einer Seite des ersten Polygones zum Durchmesser.

Vieta ging nun von dem eingeschriebenen Quadrate über zu dem eingeschriebenen regulären Achtecke, von diesem zum Sechzehnecke, dann zum Zweiunddreifsigecke u. s. f. bis ins

*) Siehe auch das Kapitel „De mensura circuli“ in des gleichen Verfassers interessantem Werke „Arithmetici libri duo et Geometriae libri VI (Lugd. Batavorum 1626), oder auch meine in der Züricher Vierteljahrsschrift veröffentlichte Skizze (Bd. 35, pag. 14).

**) Francisci Vietae Opera mathematica (Ausgabe besorgt von Schooten. Lugduni Batavorum 1646), pag. 398—400.

Unendliche durch stete Verdopplung der Seitenzahl. Indem er dann die Supplementarsehne für die Seite eines jeden dieser Polygone berechnete, konnte er das Verhältnis des Flächeninhaltes eines jeden Polygones zu dem des folgenden angeben. Durch Multiplikation dieser unendlich vielen Verhältnisse erhielt er dann das Verhältnis des Flächeninhaltes des ersten Polygones, nämlich des Quadrates, zu demjenigen des letzten Polygones, nämlich des Kreises.

Indem Vieta den, wie er selbst bemerkte, zuerst von Antiphon*) ausgesprochenen Gedanken in der angegebenen Weise wirklich durchführte, gelangte er zu dem sehr bemerkenswerten Resultate, dafs der Kreis, dessen Durchmesser gleich der Einheit ist, den Flächeninhalt besitzt**):

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots \text{ in inf.}}$$

Da dieser Flächeninhalt andererseits gleich $\frac{\pi}{4}$ ist, so ergiebt sich die interessante Formel:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots \text{ in inf.}}$$

Dieser merkwürdige Ausdruck dürfte nicht nur als die erste exakte analytische Darstellung für die Zahl π zu bezeichnen sein, sondern auch als das erste

---

*) Siehe pag. 13.

**) Wohl nur in Folge eines Versehens fehlt bei Vieta vor jedem inneren Wurzelzeichen der Faktor $\frac{1}{2}$. Bezeichnet man nämlich die Supplementarsehne der Seite eines regulären n-Eckes mit s_n und den Durchmesser mit 1, so ist $s_{2n}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s_n}$. Es ist aber $s_4=\sqrt{\frac{1}{2}}$ also $s_8=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}$, $s_{16}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}$ u. s. f.

Beispiel der Darstellung einer Zahl durch ein unendliches Produkt*).

Aufser dieser Formel für den Flächeninhalt hat Vieta aber auch noch, „indem er den Spuren des Archimedes folgte", mittels eingeschriebener und umgeschriebener Polygone, mit dem Sechseck beginnend und mit dem $2^{16} \cdot 6$-Eck abschliefsend, die durch den folgenden Satz bestimmten engen Grenzen für die Zahl π gegeben**): Setzt man den Durchmesser eines Kreises gleich 100 000, so ist sein Umfang gröfser als $314\,159\frac{26\,535}{100\,000}$, aber kleiner als $314\,159\frac{26\,537}{100\,000}$. Vieta gab also die Zahl π auf 9 Dezimalen richtig an***).

*) Dafs das in der Vieta'schen Formel vorkommende unendliche Produkt absolut konvergent ist, habe ich im 36. Bande der Zeitschrift für Math. u. Phys., Hist.-litt. Abt. („Über die Konvergenz einer von Vieta herrührenden eigentümlichen Produktentwicklung") folgendermafsen nachgewiesen. In der Abhandlung: „Variae observationes circa angulos in progressione geometrica progredientes" (Opuscula anal. I., pag. 346) hat Euler, wohl ohne Kenntnis der Vieta'schen Formel, für den Kreisbogen s die Formel $s = \dfrac{\sin s}{\cos\frac{s}{2} \cdot \cos\frac{s}{4} \cdot \cos\frac{s}{8} \cdot \cos\frac{s}{16} \cdots} \quad (s<\pi)$ aufgestellt, welche für $s = \frac{\pi}{2}$ mit der Vieta'schen identisch wird. Nun ist aber das Produkt $P = \prod_{\nu=1}^{\infty} \cos\frac{s}{2^\nu} = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - 2\sin^2\frac{s}{2^{\nu+1}}\right)$ absolut konvergent, weil, wie leicht eingesehen wird, die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} 2\sin^2\frac{s}{2^{\nu+1}}$$

konvergiert. Für die logarithmische Berechnung von π ist die Vieta'sche Formel wegen ihrer starken Konvergenz sehr bequem. — Mit der Produktentwicklung von $\frac{\arcsin x}{x}$ und verwandten Funktionen hat sich auch, anscheinend ohne die Arbeiten von Vieta und Euler gekannt zu haben, Herr Seidel beschäftigt in der Abhandlung: „Über eine Darstellung des Kreisbogens, des Logarithmus und des elliptischen Integrales I. Art durch unendliche Produkte" (Crelle, Bd. 73), auf welche Herr Stickelberger mich aufmerksam zu machen die Güte hatte.

**) Vietae Opera, pag. 392.

***) Kurz erwähnt seien hier auch noch die Verdienste, die sich Vieta um die Ausbildung der Trigonometrie, insbesondere der sphäri-

Der von Vieta erreichte Genauigkeitsgrad wurde bald von dem holländischen Mathematiker Adrianus Romanus (Adriaen van Roomen, geb. zu Löwen, gest. 1616 als Prof. der Math. an der Universität Würzburg) überboten, der in seiner Schrift: „In Archimedis circuli dimensionem expositio et analysis. Apologia pro Archimede ad Cl. vir. Josephum Scaligerum*) etc. (Wurceburgi anno 1597)“ mit Hülfe des 2^{30}-Ecks die Zahl π auf 15 Dezimalen berechnete. Aber noch viel Gröfseres in bezug auf Geduld, Ausdauer und Geschicklichkeit im Rechnen leistete Ludolf van Ceulen**) (geb. zu Hildesheim 1539, gest. als Prof. der Mathematik und der Kriegswissenschaften in Leyden 1610. Der Beiname „van Ceulen“ deutet nur darauf hin, dafs die Familie aus Köln, holländisch Ceulen, stammte). In der Schrift „Van den Circkel***) (Delft 1596)“ setzt Ludolf seine im Jahre 1586 begonnenen Berechnungen auseinander, er zeigt, wie er nach der archimedischen Methode durch fortgesetzte Verdopplung der Seitenzahl eingeschriebener und umgeschriebener Polygone bis zum $60 \cdot 2^{29}$-Eck vorgedrungen sei, um die Zahl π bis auf 20 Dezimalen berechnen zu können, und schliefst mit den Worten: „Die lust heeft, can naerder comen“. Diese Lust wandelte ihn aber später selber an. Er berichtet darüber

---

schen Trigonometrie, erwarb, sowie die Fortschritte, die ihm die Theorie der algebraischen Gleichungen verdankt (Vieta'sche Formeln). Siehe Wolf I., pag. 169—175.

*) Der berühmte Philologe an der Leydener Universität Joseph Scaliger (1540—1609) war 1594 in seiner Schrift „Cyclometrica elementa“ durch höchst konfuse Rechnungen zu dem Resultate gelangt, dafs bereits der Umfang des eingeschriebenen Zwölfecks gröfser sei als der Kreisumfang und dafs es daher keinen Zweck habe, Polygone von noch mehr Seiten oder gar umgeschriebene Polygone zu Hülfe zu nehmen. Es könne eben sehr wohl etwas geometrisch richtig und arithmetisch falsch sein. Das grofse Ansehen, welches Scaliger als Philologe genofs, veranlafste die gröfsten Mathematiker der damaligen Zeit, wie Adrianus Romanus, Ludolf, Clavius, Vieta u. a. gegen ihn zu schreiben. (Siehe Kästner, Geschichte der Mathematik, B. 1, pag. 486—511.)

**) Siehe: „Notice sur Ludolphe von Colen“ par Vorstermann van Oijen (Boncompagni's Bullettino 1868).

***) In lateinischer Übersetzung von Willebrord Snellius herausgegeben unter dem Titel: Ludolphi a Ceulen de circulo et adscriptis liber (1619).

in seinem Werke*): „De Arithmetische en Geometrische fondamenten“ mit folgenden Worten: „In mijnen boeck van den circkel, is bewesen, als den Diameter eenes circkels is $3\frac{1415926535897932384 6}{10000000000000000000}$ mael wert ghenomen, compt een linie vvelcke te cort is voor den omloop des selven circkels, ende den Diameter ghenomen $3\frac{14159265358979323847}{10000000000000000000}$ mael, compt te lanck voor den omloop, hoe vvel men door dese can meten alle circkels, vvelcke op deser Aerden moghen voorghestellt vverden, nochtans heft mijn ghelust dese reden veel naerder te soecken met hulpe mijnes Discipels Pieter Cornelifs, te vveten, den Diameter ghenomen $3\frac{14159265358979323846264338327950}{10000000000000000000000000000000000}$ mael, compt te vveynich, ende $3\frac{14159265358979323846264338327951}{10000000000000000000000000000000000}$ mael ghenomen, compt een rechte linie, vvelcke langher dan des circkels omloop is“.

Späteren Berichten zufolge habe Ludolf die Zahl π sogar noch bis auf 35 Dezimalen berechnet. Diese sollen auch, seinem letzten Wunsche entsprechend, auf seinem, allerdings verloren gegangenen Grabstein eingeschrieben gewesen sein.

Bei aller Achtung vor dem riesenhaften Fleifse und der ungeheueren Geduld, welche Ludolf durch diese Rechnungen bekundete, mufs es uns heute doch befremdlich erscheinen, dafs die Zahl π nach einem Mathematiker benannt worden ist und noch benannt wird, der verhältnismäfsig wenig Orginalität bei ihrer Ermittlung gezeigt hat und dessen Leistungen uns doch nicht im entferntesten das Interesse einflöfsen, welches die Kreismessung des Archimedes, des eigentlichen Schöpfers aller der bis zu jenem Zeitpunkte angewandten Methoden, stets behaupten wird.

Von ungleich höherem Werte erscheinen da die schönen

---

*) Mit dem Bildnisse Ludolf's versehen, nach dessen Tode herausgegeben von seiner Witwe Adriana Simons (Leyden 1615). Aufser der bereits genannten ausführlichen Darstellung von Vorstermann van Oijen siehe noch in bezug auf Ludolf: Wolf I., pag. 162—163; Kästner, Gesch. d. Math. Bd. 3, pag. 50—51; Klügels Wörterbuch, Artikel Cyklotechnie, pag. 649—650.

Sätze, durch welche die beiden grofsen holländischen Mathematiker und Physiker Willebrord Snellius (geb. 1580 zu Leyden, gest. daselbst als Professor der Mathematik 1626), namentlich aber Christian Huygens*) (geb. im Haag 1629, gest. daselbst 1695) die Theorie der Kreismessung bereicherten. Snellius und Huygens müssen als die ersten bezeichnet werden, welche anfingen, die von Archimedes geschaffene Methode der numerischen Rektifikation wesentlich umzugestalten und ihr neue Gedanken zuzuführen. In dem schönen Buche „Cyclometricus" (Lugd. Bat. 1621) zeigte Snellius, dafs man für die Bestimmung der Länge eines Kreisbogens nicht auf die verhältnismäfsig doch weit auseinander liegenden Grenzen angewiesen sei, welche durch die zu dem Bogen gehörigen Seiten des eingeschriebenen und umgeschriebenen Polygones geliefert werden, sondern dafs man engere Grenzen angeben könne, ohne genötigt zu sein, Polygone von gröfserer Seitenzahl zu Hülfe zu nehmen.

Leider ist es Snellius nicht gelungen, die beiden Sätze, welche das Fundament seiner Untersuchungen bilden, strenge zu beweisen, sodafs später Huygens mit Recht dieselben in seine klassische Abhandlung „De circuli magnitudine inventa" (siehe § 15, Lehrsatz XII und § 16, Lehrsatz XIII dieser Abhandlung) aufnahm, da die von ihm gegebene strenge Begründung jener Sätze mit seinen eigenen Untersuchungen in dem engsten Zusammenhange stand.

Von der Richtigkeit seiner beiden Theoreme überzeugt setzte Snellius die mit Hülfe derselben gewonnene grofse Abkürzung in folgender Weise in Evidenz (Cyclometricus, Prop. 31). Bei Zugrundelegung des eingeschriebenen und umgeschriebenen Sechseckes erhält man nach Archimedes für π die Grenzen 3 und 3,464. Mit Benutzung jener beiden Sätze aber kann man für π bereits aus denselben Sechsecken die Grenzen 3,14022 und 3,14160 ableiten, welche sogar noch enger sind als die von Archimedes mit Hülfe des 96-Ecks mühsam berechneten.

*) In bezug auf das Leben von Huygens siehe z. B. die von G. J/'s Gravesande verfafste Biographie in Huygens' Opera varia (Lugd. Bat. 1724).

Legte aber Snellius das 96-Eck zu Grunde, so lieferten ihm seine Sätze die Grenzen 3,1415926272 und 3,1415928320 u. s. f. Schliefslich verifizierte Snellius sogar die von Ludolf gefundenen Grenzen und zwar mit unverhältnismäfsig viel geringerem Aufwande von Rechnung.

Berücksichtigt man die Thatsache, dafs das Fundament der Snellius'schen Cyclometrie der sorgfältigeren Begründung erst noch bedurfte, obwohl damit der Wert dieser gedankenreichen und ungemein anregenden Arbeit nicht unterschätzt werden soll, so wird man es verstehen, wenn Huygens in der Vorrede zu seiner grofsen Abhandlung*) „De circuli magnitudine inventa" (Lugd. Bat. Elzevier 1654) erklärt, dafs von allen den Sätzen, auf welche sich jede Ausmessung des Kreises stütze, bis jetzt nur der eine feststehe, nämlich der, dafs der Kreis gröfser sei als das ihm eingeschriebene und kleiner als das ihm umgeschriebene Polygon. Er aber — so fährt der damals kaum 25jährige Mathematiker mit berechtigter Zuversicht fort — wolle nunmehr eine sorgfältigere Bestimmung der Gröfse des Kreises beibringen. Und in der That hat Huygens damit nicht zuviel gesagt. Denn die genannte Abhandlung ist nicht nur für die Kreismessung eine geradezu epochemachende, sie gehört auch unstreitig zu den schönsten und bedeutendsten elementargeometrischen Arbeiten, die jemals geschrieben worden sind, und wird, wie die Abhandlung des Archimedes, ihren Wert behalten, auch wenn die darin niedergelegten Resultate durch die Mittel der Analysis heutzutage auf viel kürzerem Wege gewonnen werden können. Auf den reichen Inhalt dieser Abhandlung hier ausführlicher einzutreten, hiefse derselben Unrecht thun: sie gehört zu denjenigen, die von jedem, der sich für die Geschichte der Mathematik interessiert, gelesen werden sollte. Nur einige der Sätze mögen kurz erwähnt werden:

Jeder Kreis ist gröfser als ein eingeschriebenes gleichseitiges Polygon, vermehrt um den dritten

*) Siehe in bezug auf dieselbe auch die interessante Korrespondenz, welche Huygens mit F. van Schooten, dem Herausgeber Vieta's, Grégoire de St. Vincent und anderen unterhielt und welche in dem ersten Bande der neuen Huygens-Ausgabe abgedruckt ist (1888). Siehe namentlich die Briefe Nr. 181—192 dieser „Correspondance".

Teil des Überschusses, um welchen dieses Polygon ein anderes eingeschriebenes von halb so viel Seiten übertrifft. (Lehrsatz V.)

Jeder Kreisumfang ist gröfser als der Umfang eines ihm eingeschriebenen gleichseitigen Polygones, vermehrt um den dritten Teil des Überschusses, um welchen dieser den Umfang eines anderen eingeschriebenen Polygones von halb so viel Seiten übertrifft. (Lehrsatz VII.)

Jeder Kreis ist kleiner als zwei Drittel eines ihm umgeschriebenen gleichseitigen Polygones, vermehrt um ein Drittel des dazu ähnlichen eingeschriebenen Polygones. (Lehrsatz VI.)

Der Umfang eines jeden Kreises ist kleiner als die kleinere der beiden mittleren Proportionalen zwischen den Umfängen zweier ähnlicher regulärer Polygone, von denen das eine dem Kreise eingeschrieben, das andere umgeschrieben ist. Die Kreisfläche aber ist kleiner als das zu jenen ähnliche Polygon, dessen Umfang der gröfseren der beiden mittleren Proportionalen gleich ist. (Lehrsatz XI.)

Bezeichnet man die Länge eines Bogens, welcher kleiner sein möge als der Halbkreis, mit a, seinen Sinus mit s und seine Sehne mit s', so ist stets a zwischen den Grenzen gelegen

$$s' + \frac{s' - s}{3} < a < s' + \frac{s' - s}{3}\,\frac{4s' + s}{2s' + 3s}.$$ (Lehrsatz XVI.)

Durch diese und viele andere Sätze, die auch abgesehen von der Aufgabe der numerischen Rektifikation grofses Interesse besitzen, gelingt es Huygens bei der Berechnung von π stets dreimal so viele Dezimalstellen zu erhalten als die gewöhnlichen Methoden geben. Genügt es ihm doch, um die von Archimedes gewonnenen Grenzen zu erhalten, die Seite des eingeschriebenen regulären Dreiecks zu kennen! Das Sechzigeck aber liefert ihn die Grenzen 3,1415926533 und 3,1415926538, während man nach der Snellius'schen Methode

selbst bei Benutzung eines 96-Eckes doch nur die 6 ersten und nach Archimedes gar nur die 2 ersten Dezimalen erhält!

Aufser dieser grundlegenden Abhandlung hat sich Huygens noch bei vielen anderen Gelegenheiten mit der Kreismessung beschäftigt. Ich erwähne die Abhandlung „Theoremeta de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli ex dato portionum gravitatis centro“ (Opera varia I, pag. 315—328), deren Resultate in der von uns besprochenen vielfach verwertet werden; ferner die zwischen Huygens und dem der Wissenschaft allzu früh entrissenen englischen Mathematiker J. Gregory (1638—1675) ausgetauschte „de circuli et hyperbolae quadratura controversia“ (Opera varia, I, pag. 405—482). Gregory hatte nämlich einen Beweis für die Unmöglichkeit der Quadratur des Zirkels zu geben versucht in der Abhandlung „Vera circuli et hyperbolae quadratura“, welche in der genannten controversia (Opera varia, I, pag. 405—462) abgedruckt ist. Huygens, der übrigens selbst von dieser Unmöglichkeit durchaus überzeugt war, gelang es aber, jenen Beweis als nicht richtig nachzuweisen, indem er namentlich darauf hindeutete, dafs noch nicht einmal entschieden sei, ob der Kreis und das Quadrat seines Durchmessers kommensurabel seien oder nicht.

Drittes Kapitel.

Zweiter Zeitraum.

Von der Erfindung der Differenzial- und Integralrechnung bis zum Beweise der Irrationalität der Zahl π durch Lambert.

§ 10. Die Begründung der neuen Analysis und deren Einfluſs auf die Methoden der Kreismessung.

Durch die klassischen Arbeiten von Snellius und Huygens erreichte die von Archimedes begründete Methode der eingeschriebenen und umgeschriebenen Polygone ihre höchste Ausbildung, aber auch ihren Abschluſs. Denn die in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts durch die Arbeiten von Huygens,

Fermat, Wallis, Brouncker und anderer vorbereitete, namentlich aber durch Newton (1642—1727) und Leibnitz (1646—1716) begründete und im Vereine mit den beiden Brüdern Bernoulli (Jakob Bernoulli 1654—1705, Johann Bernoulli 1667—1748) ausgearbeitete Analysis des Unendlichen änderte die Anschauungen und die Methoden in den mathematischen Wissenschaften, und nicht zum wenigsten in der Kreismessung, von Grund auf. Waren es früher die eingeschriebenen und umgeschriebenen Polygone, deren man sich ausschliefslich zur Ausmessung des Kreises bediente, so trat jetzt das Bestreben in den Vordergrund, für das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser analytische, durch eine unendliche Reihe von Operationen gebildete Ausdrücke zu gewinnen, wodurch allmählich die alten elementargeometrischen Methoden vollständig verdrängt wurden.

So fand John Wallis (geb. 1616, gest. als Professor der Mathematik in Oxford 1703) die Darstellung der Zahl π durch ein unendliches Produkt, indem er in seiner Arithmetica infinitorum (Opera, I, pag. 467) bewies, dafs:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots$$

sei, eine Darstellung, die vor der Vieta'schen den grofsen Vorzug besitzt, dafs nur rationale Operationen verlangt werden; so gab ferner Lord Brouncker (1620—1684) die bemerkenswerte Formel:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{9}{2} + \frac{25}{2} + \frac{49}{2} + \frac{81}{2} + \frac{121}{2} + \cdots,$$

welche die Zahl π durch einen unendlichen Kettenbruch berechnen lehrt. Brouncker hatte diese Formel Wallis ohne Beweis mitgeteilt, der dann in seiner Arithmetica infinitorum ihre Richtigkeit bewies*).

---

*) Euler hat in seiner Introductio in analysin infinitorum (I., pag. 305) die Brouncker'sche Formel als einen speziellen Fall viel allgemeinerer

Eine andere, allerdings wenig einfache Darstellung veröffentlichte der oben erwähnte Gregory, indem er für die Kreisfläche den Ausdruck:

$$\cfrac{4r^2}{2d - \cfrac{e}{3} - \cfrac{e^2}{90d} - \cfrac{e^3}{756d^2} - \cfrac{23e^4}{113400d^3} - \cdots}$$

mitteilte, in welcher r den Radius, d die Hälfte der Seite des eingeschriebenen Quadrates bedeutet und $e = r - d$ ist*).

Die eigentliche Quelle aber der folgenden Untersuchungen über die Kreismessung bildete die zuerst von Gregory (1670) und dann, von diesem unabhängig, von Leibnitz (1673) gefundene Reihe, welche den zu einer gegebenen trigonometrischen Tangente x gehörigen (durch den Radius gemessenen) Bogen arctg x darstellt, nämlich:

$$\text{arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Indem wir uns dieser modernen Schreibweise bedienen, dürfen wir übrigens nicht aufser Acht lassen, dafs es zur Zeit von Gregory noch nicht üblich war, den Bogen durch den Radius zu messen und dafs man unter der Tangente eine Linie, nämlich den Abschnitt auf der Berührungslinie und nicht das Verhältnis dieses Abschnittes zum Kreisradius, verstand. Bezeichnet man daher die Länge der drei Linien, nämlich des Radius, des Bogens und der Tangente, resp. mit r, a und t, so lautet in der alten Schreibweise die Gregory'sche Reihe:

$$a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \cdots$$

Setzt man in der obigen Reihe, durch welche arctg x durch die Tangente x ausgedrückt ist, $x = 1$, also arctg $x = \frac{\pi}{4}$, so erhält man die sogenannte Leibnitz'sche Reihe:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

Entwicklungen nachgewiesen. In dem gleichen Werke beweist Euler auch die Wallis'sche Formel durch Entwicklung von $\sin \frac{m\pi}{2n}$ und $\cos \frac{m\pi}{2n}$ in unendliche Produkte (I., pag. 146).

*) Montucla, Histoire des recherches sur la quadrature du cercle, pag. 138.

Diese Reihe, welche zugleich das Verhältnis der Kreisfläche zu dem Quadrate des Durchmessers darstellt, war von Leibnitz im Jahre 1674 mehreren ihm befreundeten Mathematikern brieflich mitgeteilt worden. Im Drucke*) veröffentlichte er aber seine darauf bezüglichen Untersuchungen erst im Jahre 1682 unter dem Titel „De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus“. Obwohl nun diese Leibnitz'sche Reihe die von Vieta, Wallis und Brouncker gegebenen Darstellungen an Einfachheit bei weitem übertrifft, so ist sie doch wegen ihrer langsamen Konvergenz für die praktische Berechnung der Zahl π nicht sehr brauchbar.

Man kann aber aus der Reihe für artg x andere sehr rasch konvergirende Reihen ableiten. Zunächt versuchte man dies dadurch, dafs man $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$, also $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{6}$ setzte. Man erhielt dann die Reihe:

$$\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \frac{1}{3^4 \cdot 9} - \frac{1}{3^5 \cdot 11} + \cdots\right),$$

aus welcher man, wenn einmal $\sqrt{\frac{1}{3}}$ auf hinreichend viele Dezimalstellen berechnet war, durch successives Dividieren von $\sqrt{\frac{1}{3}}$ die Zahl π leicht bestimmen konnte. Als viel vorteilhafter aber erwiesen sich die Relationen, die wir heute mit dem Namen Additionstheoreme bezeichnen, und die alle aus der einen Gleichung entspringen:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung, oder auch durch Spezialisieren, erhält man leicht Ausdrücke für

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z,$$

oder für $2 \operatorname{arctg} x$, $3 \operatorname{arctg} x$ etc. Derartige Relationen waren es nun fast ausschliefslich, mit Hülfe deren die Mathematiker

*) Acta erud. Lips. pag. 11 u. flg. Mit dem Titel seiner Abhandlung wollte aber Leibnitz keineswegs andeuten, dafs der Kreis zu dem Quadrate des Durchmessers kommensurabel sei. — In dem gleichen Bande befindet sich auch die schöne Näherungskonstruktion von Kochanski.

seit dem Anfange des 18. Jahrhunderts die Zahl π zu berechnen suchten. Durch geschicktes Disponieren wurden auf diese Weise Rechnungsmethoden hergestellt, die allerdings alle früher ausgeführten numerischen Bestimmungen von π weit hinter sich zurückliefsen. So benutzte im Jahre 1706 der englische Mathematiker Machin (1680—1752) die Relation:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239},$$

oder:

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \frac{1}{7 \cdot 239^7} + \cdots\right),$$

um die Zahl π auf 100 Dezimalen zu berechnen, nachdem kurz zuvor Abraham Sharp (1653—1742) mit Hülfe der oben gegebenen Reihe für $\frac{\pi}{6}$ die 72 ersten Dezimalen erhalten hatte. Die von Machin benutzte Darstellung von $\frac{\pi}{4}$ ist für die numerische Berechnung aufserordentlich geeignet, denn die erste Reihe ist leicht zu berechnen, da der Quotient der Glieder $\frac{1}{5}, \frac{1}{5^3}, \frac{1}{5^5}, \ldots$ gleich $\frac{1}{25} = \frac{4}{100}$ ist, und die zweite Reihe ist eine sehr stark konvergente.

Im Jahre 1719 veröffentlichte der französische Mathematiker Lagny (1660—1734) sogar 127 Dezimalstellen von π. Als diese später von Vega (1754—1802), der π bis auf 140 Stellen berechnete, kontrolliert wurden, ergab sich die Richtigkeit aller der von Lagny angegebenen Stellen mit Ausnahme der 113ten, welche nicht 7 sondern 8 lauten mufste.

Man ist dabei nicht stehen geblieben. Im Jahre 1844 berechnete der Hamburger Schnellrechner Zacharias Dase (1824—1861) nach der ihm von Prof. Schulz in Wien gegebenen Formel:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8}$$

im Laufe von kaum 2 Monaten die 200 Dezimalen*)

*) Siehe Crelle Bd. 27 und Wolf I., pag. 177.

$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433$
$83279\ 50288\ 41971\ 69399\ 37510$
$58209\ 74944\ 59230\ 78164\ 06286$
$20899\ 86280\ 34825\ 34211\ 70679$
$82148\ 08651\ 32823\ 06647\ 09384$
$46095\ 50582\ 23172\ 53594\ 08128$
$48111\ 74502\ 84102\ 70193\ 85211$
$05559\ 64462\ 29489\ 54930\ 38196.$

Endlich ist in neuerer Zeit die Zahl π von Richter bis auf 500 und von Shanks sogar bis auf 700 Dezimalen angegeben worden. Mit Recht bemerkt Herr Schubert in seiner schönen gemeinverständlichen Abhandlung „Die Quadratur des Zirkels in berufenen und unberufenen Köpfen“ (Hamburg 1889), dafs Berechnungen auf so viele Dezimalstellen höchstens insofern einen Wert haben, als dadurch die Güte der neueren Methoden gegenüber den älteren, mit denen derartige Resultate niemals zu erreichen gewesen wären, illustriert würde. Sonst aber haben dieselben weder wissenschaftlichen noch praktischen Zweck. Welchen Genauigkeitsgrad z. B. nur 15 Dezimalstellen bieten, ist von Herrn Schubert in der genannten Abhandlung sehr anschaulich dargestellt worden. Welche Genauigkeit aber gar durch 100 Dezimalen erreicht werden kann, geht über die menschliche Vorstellungskraft hinaus.

§ 11. Die Thätigkeit von Leonhard Euler auf dem Gebiete der Kreismessung.

Bevor wir zu demjenigen Mathematiker übergehen, der den Untersuchungen über die Kreismessung ganz neue Bahnen anwies und geradezu die Grundlage schuf für eine erfolgreiche wissenschaftliche Inangriffnahme der Frage nach der Möglichkeit einer Quadratur des Zirkels — es bedarf keiner Erwähnung, dafs wir von Leonhard Euler sprechen —, wird es am Platze sein, einen kurzen Rückblick auf das zu werfen, was in bezug auf unser Problem bis zur Mitte des vorigen Jahrhunderts geleistet worden war.

Durch die von Archimedes begründeten und von Huygens

zum Abschlusse gebrachten Untersuchungen über die eingeschriebenen und umgeschriebenen Polygone, namentlich aber durch die Forschungen, welche sich seit der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts auf die Analysis des Unendlichen, insbesondere auf die Theorie der unendlichen Reihen und speziell der Gregory'schen Reihe, stützten, war man in den Besitz von Methoden*) gelangt, durch welche die Ausmessung des Kreises bis zu jedem noch so hohen Genauigkeitsgrade ausgeführt werden konnte. Kannte man nun aber auch die Zahl π bis auf mehr als 100 Dezimalen, hatte man auch wissenschaftlich sehr interessante und praktisch vortrefflich verwendbare Darstellungen, z. B. in Form von stark konvergenten Reihen, für dieselbe erhalten, so war doch die Natur dieser wichtigen und merkwürdigen Zahl insofern noch genau ebenso unbekannt wie im Altertume, als man noch nicht einmal wufste, ob π eine rationale oder eine irrationale Zahl sei**). Damit zusammenhängend war daher auch die Frage nach der Möglichkeit der Quadratur des Zirkels noch eine eben so dunkle wie zur Zeit des Archimedes, ja man hatte für eine wissenschaftliche Behandlung dieser Frage noch nicht einmal die richtige Formulierung gewonnen. Wohl hatte es zu allen Zeiten Leute gegeben, welche im Besitze einer Quadratur zu sein wähnten, aber diese Quadraturen hatten sich stets doch nur als mehr oder weniger gute Annäherungen erwiesen, so selbstbewufst sie wohl auch von ihren Urhebern als genaue Lösungen des Problems angekündigt worden waren. Dafs auch solche Arbeiten unter Umständen die Wissenschaft fördern konnten, sei es, dafs

*) Vollständig verschieden von den bisher besprochenen sind die eigenartigen und interessanten Methoden, durch welche Herr Prof. Wolf nach den Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Zahl π experimentell ermittelte. Es sind dies seine in der Züricher Vierteljahrsschrift (Bd. 26 u. 27) veröffentlichten Würfelversuche sowie seine in den Berner Mitth. (1850) enthaltenen Untersuchungen über das zuerst von Buffon, später von Laplace behandelte „Nadelproblem". Siehe auch Wolf I., pag. 127—128 und pag. 177.

**) Versuche, die Irrationalität von π zu beweisen, waren allerdings schon gemacht worden. Siehe die Anmerkung zu § 10 der Lambertschen Abhandlung, wo auf den in Joh. Chr. Sturms Mathesis enucleata gegebenen Beweis verwiesen ist.

sie nur zur Schärfung der Kritik beitrugen, sei es, dafs sie auch selbst, von einigen Irrtümern abgesehen, neue und interessante Wahrheiten enthielten, zeigt unter anderem das Beispiel des Gregorius von St. Vincent (geb. zu Brügge 1584, gest. zu Gent 1667) und seines mit Descartes und Huygens ausgefochtenen Streites*).

So lagen die Verhältnisse, als Leonhard Euler**) (geb. zu Basel am 15. April 1707, gest. zu St. Petersburg am 18. Sept. 1783) seine reiche, auf alle Gebiete des mathematischen Wissens sich erstreckende Thätigkeit zu entfalten begann. Es kann nicht die Absicht dieser Zeilen sein, den Verdiensten eines Euler, selbst nur auf dem verhältnismäfsig kleinen Gebiete der Kreismessung, gerecht werden zu wollen. Wir müssen uns darauf beschränken, das Wichtigste kurz anzudeuten.

Wie die Trigonometrie von den Griechen begründet wurde, welche Fortschritte sie bei den Indern und Arabern machte, wie sie von den letzteren den Völkern des christlichen Mittelalters überliefert wurde, um dann zur Zeit der Renaissance durch Peurbach, namentlich aber durch Regiomontanus zu einer selbständigen Wissenschaft ausgebildet zu werden, das alles haben wir, wenn auch natürlich nur in ganz flüchtigen Umrissen, zu zeichnen versucht. Die Trigonometrie aber, wie wir sie heute besitzen, ist, auch wenn wir uns vorläufig nur auf den elementaren Teil derselben beziehen, der äufseren Form nach eine Schöpfung Eulers. Erst Euler hat beispielsweise die Seiten eines Dreiecks kurz mit a, b, c und die gegenüberliegenden Winkel mit α, β, γ (oder auch mit A, B, C) bezeichnet, was ihn zu den erst seit ihm konsequent benutzten kurzen Bezeichnungen $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tang}\alpha$, $\cot\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$ führte. Vor Euler wurden diese Ausdrücke entweder durch

---

*) Huygens, Opera varia, I., pag. 329.

**) In bezug auf das Leben und die Werke von Leonhard Euler siehe die Gedächtnisreden von Condorcet und Fuss; ferner Wolf, Biographieen zur Kulturgeschichte der Schweiz, Bd. 4; Die Basler Mathematiker Daniel Bernoulli und Leonhard Euler, hundert Jahre nach ihrem Tode gefeiert von der Naturforschenden Gesellschaft (Basel 1884); Rudio, Leonhard Euler, Vortrag gehalten auf dem Rathause zu Zürich am 6. Dec. 1883 (Basel 1884).

besondere Buchstaben ersetzt oder, noch häufiger, durch Worte umständlich umschrieben. Einige Beispiele werden dies am besten erläutern. Will man aus den drei Winkeln α, β, γ und der Seite a eines Dreiecks die beiden Seiten b und c finden, so schreiben wir bekanntlich $b : a = \sin\beta : \sin\alpha$, oder $b = a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ etc. Dafür mufs Adrianus Metius z. B., der diese Formelsprache noch nicht kannte, folgendermafsen sagen: „Ut se habet sinus anguli lateri dato oppositi, ad latus datum: ita etiam reliquorum angulorum sinus, ad latera opposita“ (Adriani Metii Arithmeticae libri duo et Geometriae libri VI, Lugd. Batav. 1626, pag. 103). Johann Christoph Sturm, der in der Kunst der Bezeichnung schon verhältnismäfsig weit fortgeschritten war (er bezeichnet z. B. das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser bereits durch einen Buchstaben, nämlich e), bedient sich im Jahre 1689 in seiner Mathesis enucleata für den gleichen Satz noch genau derselben Worte wie Metius, während er ferner z. B. den Satz:

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

der sphärischen Trigonometrie in die Form kleidet:

Sin. ang. A ad Sin BC ut Sin ang. C ad Sin AB.

Man wird aus diesen Beispielen bereits erkennen, wie schwerfällig und unübersichtlich vor Euler die goniometrischen Formeln und die trigonometrischen Sätze ausgesehen haben. Aber nicht nur die äufsere Geschmeidigkeit ist es, welche die moderne Trigonometrie Euler verdankt. Auch der eigentliche Inhalt der trigonometrischen Ausdrücke ist seit und durch Euler ein anderer geworden. Während früher Sinus, Kosinus, Tangente und Kotangente gewisse zu dem Kreisbogen gehörige Linien bedeuteten, definierte erst Euler jene Ausdrücke als die Verhältnisse dieser Linien zum Kreisradius*). Dadurch aber gewannen

*) Auffallenderweise giebt Legendre in seinen Eléments de géométrie (1794) noch die alten Definitionen von $\sin\alpha$, etc., wodurch seine trigonometrischen Formeln

$$\left(\text{er mufs z. B. schreiben: } \sin(a+b) = \frac{\sin a\cos b + \sin b\cos a}{R}\right)$$

eine ganz unnötige Komplikation erhalten.

die Ausdrücke sin z, cos z, etc. einen ganz anderen Charakter: sie wurden analytische Gröfsen, Functionen von z. So ist Euler als der Schöpfer der trigonometrischen Funktionen zu bezeichnen. Die veränderte Anschauung aber, die Euler den trigonometrischen Ausdrücken entgegenbrachte, führte ihn zu einer seiner schönsten Entdeckungen. Denn zu diesen gehört unstreitig die Entdeckung des Zusammenhanges der trigonometrischen Funktionen mit der Exponentialfunktion. Dieser Zusammenhang findet seinen Ausdruck in den Gleichungen:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

insofern e^z die durch die beständig konvergierende Potenzreihe:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \cdots$$

definierte Exponentialfunktion bedeutet*). Welche Umgestaltung die gesamte Analysis durch diese wichtige Euler'sche Entdeckung erfuhr, dies zu schildern ist hier nicht am Platze. Hervorgehoben aber mufs werden, dafs die Euler'schen Formeln:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

welche man auch schreiben kann:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z,$$

den Ausgangspunkt aller folgenden Untersuchungen über die Natur der Zahl π bildeten. Setzt man in denselben $z = \pi$, so erhält man:

$$e^{i\pi} = -1 \quad \text{oder} \quad e^{2\pi i} = 1.$$

Diese zwischen den beiden Zahlen

$e = 2{,}718281828459045\ldots$ und $\pi = 3{,}141592653589793\ldots$

bestehende fundamentale Relation enthält den Schlüssel für die Lösung der Frage nach der Möglichkeit der Quadratur des Zirkels.

Es würde uns zu weit führen, wollten wir auf die vielen interessanten Darstellungen eintreten, wie beispielsweise:

---

*) Introductio in analysin infinitorum, I., pag. 104.

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{2^0}{1.2.3}\cdot\frac{1}{1}\pi^2$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots=\frac{2^2}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1}{3}\pi^4$$

etc.

oder:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots=\frac{\pi}{4}$$

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\cdots=\frac{\pi^3}{32}$$

etc.

oder:

$$\frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\cdot\frac{11^2}{11^2-1}\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{2^4}{2^4-1}\cdot\frac{3^4}{3^4-1}\cdot\frac{5^4}{5^4-1}\cdot\frac{7^4}{7^4-1}\cdot\frac{11^4}{11^4-1}\cdots=\frac{\pi^4}{90}$$

etc.

welche Euler für die Zahl π in der Form von unendlichen Reihen, Produkten und Kettenbrüchen in zahlreichen Abhandlungen*), insbesondere aber in seinem klassischen Werke: „Introductio in analysin infinitorum“ (Lausannae 1748) gegeben hat, und welche fast alle aus dem hervorgehobenen Zusammenhange der trigonometrischen Funktionen mit der Exponentialfunktion entspringen. Ebenso können wir auch nur ganz flüchtig der verschiedenen Darstellungen gedenken, welche Euler für die Zahl e gefunden hat. Unter diesen aber dürften, als der Beachtung besonders wert, die Kettenbruchentwicklungen für e, $\sqrt{e}$ und $\frac{e-1}{2}$ hervorgehoben werden**), nämlich:

*) Siehe z. B.: „Variae observationes circa series infinitas“ (Comment. Acad. Petrop. IX., pag. 160), oder „De variis modis circuli quadraturam numeris proxime exprimendi“ (ebendaselbst, pag. 222), oder „Variae observationes circa angulos in progressione geometrica progredientes“ (Opuscula analytica I., pag. 345) etc. etc.

**) Diese Darstellungen sind von Euler im Jahre 1737 in der Abhandlung „De fractionibus continuis dissertatio“ (Comment. Acad. Petrop. T. IX., pag. 120) mitgeteilt worden. In der Introductio findet sich nur die Formel für $\frac{e-1}{2}$, nicht aber diejenigen für e und $\sqrt{e}$. Diesem Um-

$$e = 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \text{etc.}$$

oder kürzer:

$$e = (2, \overline{1, 2m, 1}), \ (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \text{etc.}$$

oder kürzer:

$$\sqrt{e} = (1, \overline{4m + 1, 1, 1}), \ (m = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

und endlich:

$$\frac{e - 1}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \frac{1}{18} + \text{etc.}$$

Einer Thatsache aber müssen wir füglich in einer Arbeit, die der Geschichte der Zahl π gewidmet ist, noch Erwähnung thun. Wir haben uns in unserer Darstellung von Anfang an für das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser der Bezeichnung π bedient und es ist ja auch die Meinung vielfach verbreitet, als ob diese Bezeichnung eine uralte sei. Dem ist aber keineswegs so. Vielmehr ist das Bedürfnis, ganze Begriffe durch kurze, bleibende Symbole zu bezeichnen, ein durchaus modernes. Vor der Begründung der neuen Analysis, also vor dem Ende des 17. Jahrhunderts, war dieses Bedürfnis keineswegs ein allgemein empfundenes. Vor dieser Zeit wird daher von den Mathematikern (auch

---

stande ist es wohl zuzuschreiben, dafs die Darstellungen für e und $\sqrt{e}$, trotz ihrer Wichtigkeit, vollständig in Vergessenheit geraten sind, sodafs dieselben kürzlich von Herrn Hurwitz (Sitzungsberichte der Physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg 1891) als neu aufgestellt werden konnten. In der interessanten Abhandlung, auf welche wir noch einmal zurückkommen werden, giebt dann Herr Hurwitz überdies die Kettenbruchentwicklung

$$e^2 = (7, \overline{3m - 1, 1, 1, 3m, 12m + 6}), \ (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

welche bei Euler noch nicht vorkommt.

z. B. noch durchweg von Huygens) immer nur von dem „Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser“ gesprochen, ohne dafs dieses Verhältnis (vielleicht mit ganz vereinzelten Ausnahmen) jemals durch einen Buchstaben, geschweige denn durch π, bezeichnet worden wäre. Die Bezeichnung dieses Verhältnisses durch π, ebenso wie die Bezeichnung der Basis der natürlichen Logarithmen durch e, rührt vielmehr erst von Euler her. Nachdem Euler den Buchstaben π in der angegebenen Bedeutung wohl zum ersten Male*) in der aus dem Jahre 1737 stammenden Abhandlung „Variae observationes circa series infinitas“ benutzt hatte, bedienten sich in ihrer Korrespondenz Euler und Goldbach vom Jahre 1739 an fortwährend dieser Bezeichnung und von der gleichen Zeit an auch des Symboles e, während sie noch in den Jahren 1729 und 1730 p statt π geschrieben hatten. Dieses Zeichens p, statt π, bediente sich übrigens Euler nachweislich bis 1735 (siehe Comment. Acad. Petrop. T. VII. p. 126), während er von dem gleichen Jahre an für die Basis der natürlichen Logarithmen fortwährend das Symbol e benutzte (siehe Comment. Acad. Petrop. T. VII. pag. 181 und die sämtlichen folgenden Akademieabhandlungen Eulers). Johann Bernoulli, der noch im Jahre 1739 in seiner Korrespondenz mit Euler den Buchstaben c (circumferentia) gebrauchte, adoptiert in einem Briefe vom Jahre 1740 ebenfalls das Euler'sche Zeichen π. Die gleiche Bezeichnung benutzt vom Jahre 1742 an fortwährend auch Nikolaus Bernoulli (der Neffe von Johann B.) in seinen Briefen an Euler**). War somit bereits im Anfange der vierziger Jahre das Eulersche Symbol π von mehreren hervorragenden Mathematikern adoptiert worden, so bürgerte sich dasselbe erst recht nach dem Erscheinen von Euler's epochemachender Introductio allgemein ein.

---

*) Eneström, Bibl. math. 1889, pag. 28.

**) Siehe in bezug auf alle diese Angaben die von Fuss herausgegebene „Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII. siècle“ (1843).

Viertes Kapitel.

Dritter Zeitraum.

Von Lambert bis auf die Gegenwart.

§ 12. Der Beweis der Irrationalität der Zahl π durch Lambert und Legendre.

Nachdem sowohl in bezug auf die numerischen Berechnungen als auch in bezug auf die analytischen Darstellungen der Zahl π kaum noch eine Aufgabe zu lösen übrig geblieben war und man angefangen hatte zu erkennen, dafs auf diesem Wege der Frage nach der Möglichkeit der Quadratur des Zirkels nicht beizukommen wäre, machte sich in dem Bewufstsein der Mathematiker immer mehr und mehr das Bedürfnis geltend, über die eigentliche Natur jener Zahl endlich Aufschlufs zu erhalten und namentlich zu erfahren, ob dieselbe zu den rationalen Zahlen gehöre oder nicht. Es gab zwar seit dem Ende des 17. Jahrhunderts unter den grofsen Mathematikern wohl keinen, der nicht von der Irrationalität der Zahl π überzeugt gewesen wäre und seiner Überzeugung nicht Ausdruck gegeben hätte*), aber ein strenger Beweis für diese Irrationalität war nicht vorhanden. Erst nachdem Euler den wichtigen Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen und der Exponentialfunktion aufgedeckt hatte, eröffneten sich der Forschung neue Wege.

Gerade dieser Zusammenhang war es, der im Jahre 1766 es Johann Heinrich Lambert (geb. 1728 zu Mülhausen**),

*) Introductio I., pag. 93.

**) Mülhausen gehörte damals schon seit mehr als 200 Jahren zu den der Schweizerischen Eidgenossenschaft zugewandten Orten und war auch im Westfälischen Frieden ausdrücklich als zur Eidgenossenschaft gehörig bezeichnet worden. Mit Frankreich war es bekanntlich nur von 1798—1871 vereinigt. In der That „betrachtete sich Johann Heinrich Lambert fortwährend als Schweizer und wurde auch von seinen Zeitgenossen, so lange er noch keine gelehrten Titel hatte, als 'Mülhusino-Helvetus' bezeichnet". Die interessante Biographie dieses höchst originellen Mannes, der es vom einfachen Schneiderlehrling zu einem der gröfsten und vielseitigsten Gelehrten seines Jahrhunderts gebracht hat, findet sich im 3ten Bande der „Biographieen zur Kulturgeschichte der Schweiz" von Herrn Prof. Wolf.

gest. 1777 als Oberbaurat in Berlin, wohin er von Friedrich dem Grofsen berufen worden war) ermöglichte, den ersten Beweis für die Irrationalität der beiden so eng mit einander verbundenen Zahlen e und π beizubringen. In der schönen Abhandlung: „Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen“ (Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung II., pag. 140—169) bewies Lambert die beiden grundlegenden Sätze:

1) Ist x eine von Null verschiedene rationale Zahl, so kann e^x niemals rational sein. Daraus folgt dann von selbst, dafs der natürliche Logarithmus einer von 1 verschiedenen rationalen Zahl niemals rational sein kann.
2) Ist x eine von Null verschiedene rationale Zahl, so kann $\operatorname{tg} x$ niemals rational sein.

Zum Beweise dieser beiden Sätze knüpfte Lambert an die von Euler in seiner Introductio I., pag. 319 gegebene Kettenbruchentwicklung an:

$$\frac{e-1}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \frac{1}{18} + \frac{1}{22} + \text{etc.},$$

um daraus die beiden Kettenbrüche:

$$\frac{e^x-1}{e^x+1} = \cfrac{1}{\cfrac{2}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{6}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{10}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{14}{x} + \text{etc.}}}}}$$

und:

$$\operatorname{tg} x = \cfrac{1}{\cfrac{1}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{3}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{5}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{7}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{9}{x} - \text{etc.}}}}}}$$

abzuleiten und aus diesen, für den Fall, dafs x eine rationale Zahl bedeutet, die Irrationalität von e^x und $\operatorname{tg} x$ zu erschliefsen.

Aus der Gleichung $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ ergab sich dann ohne weiteres die Irrationalität von π.

Für die weitere Ausführung verweise ich auf die Abhandlung selbst, die um so lesenswerter ist, als sie auch sonst noch eine Reihe interessanter Untersuchungen und historischer Notizen enthält und überdies in einer sehr originellen Sprache abgefafst ist, die des Humors ebensowenig entbehrt wie das Portrait des seltenen Mannes, welches ich bei meinem hochverehrten Kollegen, Herrn Prof. Wolf, gelegentlich kennen gelernt habe.

Es sei noch bemerkt, dafs der Lambert'sche Beweis von der Irrationalität der Zahl π vielfach (z. B. auch von Legendre, siehe die Anmerkung am Schlusse seiner Abhandlung) irrtümlich in das Jahr 1761 verlegt wird. In der Vorrede zu dem 2ten Bande der Beiträge erklärt aber Lambert, um Anachronismen zu vermeiden, ausdrücklich: „So z. E. ist die hier vorkommende fünfte Abhandlung: für die Erforscher der Quadratur des Circuls, im Jahre 1766 vor derjenigen geschrieben worden, die ich einige Monathe nachher bey der hiesigen Königl. Akademie der Wissenschaften über eben die Materie vorgelesen. Sie können aber beyde ganz wohl beysammen bestehen.“ Diese, mit der Bemerkung „lu 1767“ versehene, Akademieabhandlung trägt den Titel: „Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques“.

Dem Lambert'schen Beweise für die Irrationalität von π fehlte zur völligen Strenge ein Hülfssatz über die Irrationalität gewisser sich ins Unendliche erstreckender Kettenbrüche, den später Adrien-Marie Legendre*) (geb. 1752 zu Toulouse, gest. zu Paris 1833) in seinen Éléments de géométrie (Note 4) hinzufügte. Dieser Hülfssatz lautet:

Wenn in dem bis ins Unendliche fortgesetzten Kettenbruche:

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} + \frac{m''}{n''} + \text{etc.}$$

*) Siehe: Beaumont, Eloge historique de Adrien-Marie Legendre (Paris, 1861).

die Zahlen m, n, m', n', etc. alle ganze positive oder negative Zahlen bedeuten und wenn überdies die einzelnen Brüche $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, etc. alle kleiner sind als die Einheit, so ist der Wert des Kettenbruches irrational. Der Kettenbruch hat, wie Legendre weiter zeigte, auch dann noch einen irrationalen Wert, wenn jene Einzelbrüche $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, etc. nicht schon von Anfang an, sondern erst nach einem gewissen Intervalle fortwährend kleiner sind als die Einheit. Mit Hülfe dieses wichtigen Satzes, der eine notwendige Ergänzung zu den Lambert'schen Untersuchungen bildet, konnte dann Legendre leicht die Irrationalität von π strenge nachweisen. Dieselben Entwicklungen liefsen ihn zugleich auch noch die Irrationalität des Quadrates von π erkennen*).

Mit dem von Lambert und Legendre gegebenen Beweise der Irrationalität von π war in der Frage nach der Möglichkeit der Quadratur des Zirkels ein bedeutender Schritt vorwärts gethan worden. Es war zwar diese Möglichkeit damit noch nicht ausgeschlossen, insofern man ja auch gewisse nichtrationale Zahlen mit Zirkel und Lineal konstruieren kann, aber die Wahrscheinlichkeit, das Problem mit diesen Hülfsmitteln lösen zu können, war doch eine wesentlich geringere geworden. Die Hauptsache aber war, dafs sich endlich, nach langem Suchen, dem Blicke ein deutlich vorgezeichneter Weg eröffnete, den die Forschung einzuschlagen hatte.

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dafs der in den Lehrbüchern gewöhnlich vorgetragene Beweis für die Irrationalität der Zahl e (nach einer in Stainville's Mélanges d'analyse algébrique [1815] pag. 339 befindlichen Bemerkung) von Fourier (1768—1830) stammt. Dieser Beweis folgert die Irrationalität von e direkt aus der Reihe:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

*) Einen anderen Beweis für die Irrationalität von π^2 hat Herr Hermite (Crelle, Bd. 76) gegeben.

Angenommen nämlich e sei gleich der rationalen Zahl $\frac{p}{q}$, so bringe man alle Glieder der Reihe bis einschliefslich $\frac{1}{q!}$ auf die linke Seite der obigen Gleichung und multipliziere die Gleichung mit $q!$ Dann erhält man links eine von Null verschiedene ganze positive Zahl, rechts dagegen die Reihe:

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots,$$

welche einen kleineren Wert als $\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots$ d. h. einen kleineren als $\frac{1}{q}$ besitzt und folglich nicht gleich einer ganzen positiven Zahl sein kann.

§ 13. Die Entdeckungen Liouville's.

Im Jahre 1840 fügte Joseph Liouville (1809—1882) den bisher bekannten Eigenschaften der Zahl e noch zwei weitere hinzu, indem er mittels des oben angegebenen Fourier'schen Verfahrens nachwies, dafs e nicht Wurzel einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten sein könne, dafs also eine Gleichung von der Form $ae^2 + be + c = 0$ unmöglich sei, wenn a, b, c ganze Zahlen bedeuten. Und er konnte sofort hinzufügen, dafs e^2 dieselbe Eigenschaft besitze, dafs also unter den gleichen Voraussetzungen für a, b, c auch eine Gleichung von der Form $ae^4 + be^2 + c = 0$ nicht bestehen könne*).

Da die von Lambert, Legendre und Liouville gefundenen Eigenschaften der Zahlen e und π alle gemeinschaftlich aus-

*) Liouville's Journal V. (1840) pag. 192 und 193. Siehe auch: Stern, Algebraische Analysis, pag. 342—343. Dafs weder e noch e^2 einer Gleichung zweiten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten genügt, folgt auch ganz direkt ohne weiteren Beweis aus den Kettenbruchentwicklungen für e und e^2 (pag. 52). Herr Hurwitz hat in der genannten Abhandlung auch noch auf elementarem Wege gezeigt, dafs e nicht Wurzel einer ganzzahligen Gleichung dritten Grades sein kann. Man kann also, was Herr Hurwitz mit Recht als bemerkenswert hervorhebt, auf ganz elementare Weise zeigen, dafs e weder Wurzel einer ganzzahligen Gleichung ersten, noch zweiten, noch dritten Grades ist.

sagten, dafs diese Zahlen nicht Wurzeln gewisser algebraischer Gleichungen mit rationalen Koeffizienten seien, so war damit die Frage aufgeworfen, von welchen algebraischen Gleichungen dieser Art denn überhaupt e und π Wurzeln sein könnten.

Nun hatte sich zwar bei den Mathematikern schon lange die Überzeugung gebildet, dafs e und π wohl überhaupt nicht Wurzeln algebraischer Gleichungen mit rationalen Koefficienten sein möchten, in ähnlicher Weise, wie man ja auch an die Irrationalität von π fest glaubte, lange bevor dieselbe wirklich bewiesen war. Schon Euler giebt jener Überzeugung Ausdruck in der Abhandlung: „De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda“ (Opuscula analytica II., pag. 98) und noch deutlicher Legendre in dem bemerkenswerten Satze (siehe den Schlufs seiner Abhandlung):

„Es ist wahrscheinlich, dafs die Zahl π nicht einmal unter den algebraischen Irrationalitäten enthalten ist, d. h. dafs sie nicht Wurzel sein kann einer algebraischen Gleichung mit einer endlichen Anzahl von Gliedern, deren Koeffizienten rational sind. Aber es scheint sehr schwer zu sein, diesen Satz strenge zu beweisen.“

In ähnlicher Weise spricht sich auch Lambert aus in seiner oben (pag. 56) erwähnten Akademieabhandlung, indem er diese auf e und π bezügliche Vermutung geradezu zu einem Satze formuliert und zum Beweise desselben auffordert.

Aber trotzdem besafsen doch alle diese Vermutungen insofern eine geringere Berechtigung als die in früheren Zeiten auf die Irrationalität von π bezüglichen, als man bis zur Mitte unseres Jahrhunderts noch gar kein Beispiel dafür kannte, dafs es überhaupt Zahlen gäbe, die nicht Wurzeln irgend einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten sein könnten.

Liouville war der erste, der hierfür einen strengen Beweis lieferte, indem er Zahlen von einfachem Bildungsgesetze herstellte, von denen sich nachweisen liefs, dafs sie keiner algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten genügen. Als ein solches Beispiel führt er unter anderen eine Zahl an, die ein ganz ähnliches Bildungsgesetz besitzt wie die Basis der natürlichen Logarithmen, nämlich:

$$x = \frac{1}{l} + \frac{1}{ll_1} + \frac{1}{ll_1 l_2} + \cdots + \frac{1}{ll_1 l_2 \ldots l_{m-1}} + \cdots$$

Bedeuten hierin $l, l_1, l_2, \ldots$ ganze Zahlen und wächst l_m hinreichend rasch mit dem Index m, so läfst sich zeigen, dafs x nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten sein kann*).

Seit dieser wichtigen Liouville'schen Entdeckung ist man berechtigt, alle Zahlen in algebraische und in transzendente einzuteilen, während man früher nur von rationalen und irrationalen Zahlen sprechen konnte. Unter einer algebraischen Zahl versteht man jetzt, nach der von Kronecker eingeführten Terminologie, jede Zahl x, welche Wurzel einer algebraischen Gleichung ist, d. h. einer Gleichung von der Form:

$$x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_n = 0,$$

in welcher die Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots c_n$ sämtlich rationale Zahlen sind, während der höchste Koeffizient immer gleich 1 vorausgesetzt wird. Sind überdies diese Koeffizienten sämtlich ganze rationale Zahlen, so heifst x eine ganze algebraische Zahl.

Unter einer transzendenten Zahl versteht man jede nicht algebraische Zahl**).

Es war daher jetzt die Frage zu entscheiden, ob die Zahlen e und π algebraische oder transzendente seien.

---

*) Liouville's Journal XVI. (1851): „Sur des classes très-étenducs de quantités dont la valeur n'est ni algébrique ni même réductible à des irrationnelles algébriques". Die Hauptsätze dieser Abhandlung hatte Liouville schon 1844 in den Comptes rendus XVIII., pag. 883 und 910 mitgeteilt.

Einen anderen Beweis für die Existenz transzendenter Zahlen gab später Herr G. Cantor in der Abhandlung: „Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen". (Crelle, Bd. 77.)

**) Den Kriterien, welche den transzendenten Charakter einer nach einem gegebenen Bildungsgesetze entwickelten Zahl bestimmen, stehen sehr bemerkenswerte Kriterien gegenüber, durch welche man nach Eisenstein (Berichte der Berl. Akad. 1852) entscheiden kann, ob gegebene Reihenentwicklungen mit rationalen Koeffizienten aus algebraischen oder transzendenten Funktionen hervorgegangen sind. Siehe die Besprechung meiner wiederholt genannten historischen Skizze durch Herrn Cantor (Zeitschr. für Math. und Physik Bd. 36).

§ 14. Algebraische Formulierung des Problems von der Quadratur des Zirkels.

Um den Zusammenhang des Problemes von der Quadratur des Zirkels mit der Frage, ob π eine algebraische oder eine transzendente Zahl sei, zu erkennen, müssen wir einige Hülfsbetrachtungen einschieben.

Die Möglichkeit der Quadratur des Zirkels war, wie wir (pag. 7) erkannt hatten, gleichbedeutend mit der Möglichkeit, aus einer gegebenen Strecke d die Strecke πd durch alleinige Benutzung von Zirkel und Lineal zu konstruieren. Wählt man der Einfachheit halber d als Längeneinheit, so handelt es sich also um die Konstruktion einer Strecke von π Längeneinheiten. Da nach Festsetzung der Längeneinheit jeder Zahl x eine ganz bestimmte Strecke (von x Längeneinheiten) und umgekehrt jeder Strecke (von x Längeneinheiten) eine ganz bestimmte Zahl x entspricht, so wollen wir zur Abkürzung von der Konstruktion der Zahl x sprechen und meinen damit die Konstruktion der entsprechenden Strecke von x Längeneinheiten.

Nun ist aus der Planimetrie bekannt, dafs, wenn die Koeffizienten einer quadratischen Gleichung als konstruierbar vorausgesetzt werden, auch die Wurzeln der Gleichung konstruiert werden können, wo unter „konstruieren“ immer „mit Zirkel und Lineal konstruieren“ verstanden ist. Aus diesem Grunde sind die Wurzeln einer jeden quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten, wie z. B. $\sqrt{2}$, konstruierbar. Bezeichnet man für den Augenblick die Wurzeln solcher Gleichungen als Irrationalitäten erster Art, so erkennt man, dafs sich jetzt auch die Wurzeln einer jeden quadratischen Gleichung konstruieren lassen, deren Koeffizienten als einzige Irrationalitäten solche erster Art enthalten, denn es sind eben die Koeffizienten einer solchen quadratischen Gleichung konstruierbare Zahlen. Nennt man die Wurzeln solcher Gleichungen kurz Irrationalitäten zweiter Art, so ergiebt sich jetzt, dafs auch die Wurzeln jeder quadratischen Gleichung konstruierbar sind, deren Koeffizienten als einzige Irrationalitäten solche erster und zweiter Art enthalten u. s. f.

Es sei daher jetzt eine Kette von quadratischen Gleichungen

der folgenden Beschaffenheit gegeben: Die Koeffizienten der ersten Gleichung seien rationale Zahlen, während die Koeffizienten jeder folgenden Gleichung nur solche Irrationalitäten enthalten, die sich aus der Auflösung der vorhergehenden Gleichungen ergeben. Dann kann man successive die Wurzeln einer jeden dieser Gleichungen, also auch der letzten, konstruieren. Man sieht also: Damit eine Zahl konstruierbar sei, ist hinreichend, dafs sie sich als Wurzel einer quadratischen Gleichung darstelle, welche das letzte Glied einer Kette von quadratischen Gleichungen der bezeichneten Art bildet.

Aber diese Bedingung ist nicht nur hinreichend, sie ist auch notwendig für die Konstruierbarkeit einer Zahl. Denn da jede Konstruktion nichts anderes ist als eine Kombination der beiden Elementaraufgaben, eine gerade Linie durch zwei gegebene Punkte zu ziehen und um einen gegebenen Punkt mit einem gegebenen Radius einen Kreis zu beschreiben, und da andererseits gerade Linien und Kreise analytisch durch Gleichungen des ersten und zweiten Grades ausgedrückt werden, so wird eine Konstruktion durch Zirkel und Lineal analytisch sich durch eine Kette von quadratischen Gleichungen ausdrücken lassen, insofern man lineare Gleichungen ja auch als spezielle quadratische auffassen kann. Da überdies jede bei der Konstruktion auszuführende Elementaraufgabe nur solche Elemente zu benutzen braucht, die durch die vorher gelösten Elementaraufgaben bereits konstruiert worden sind, so wird auch jede der auftretenden Gleichungen in ihren Koeffizienten nur solche Irrationalitäten enthalten, welche sich durch Auflösung der vorhergehenden quadratischen Gleichungen ergeben. Daraus folgt also, dafs jede durch Zirkel und Lineal konstruierbare Zahl sich als Wurzel einer quadratischen Gleichung mufs darstellen lassen, welche das letzte Glied einer Kette von quadratischen Gleichungen der bezeichneten Art bildet.

Nun läfst sich aber eine solche Kette von quadratischen Gleichungen stets ersetzen durch eine einzige algebraische Gleichung mit rationalen Koeffizienten, dadurch dafs man die in der letzten Gleichung auftretenden Irrationalitäten, welche ja Wurzeln der vorhergehenden Gleichungen sind, mit Hülfe dieser letzteren successive eliminiert. Auf diese Weise gewinnt man

den folgenden, für das Problem von der Quadratur des Zirkels fundamentalen Satz:

Damit eine Zahl durch Zirkel und Lineal konstruierbar sei, ist notwendig und hinreichend, dafs sie sich als Wurzel einer gewissen algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten darstelle, welche äquivalent ist einer Kette von quadratischen Gleichungen der bezeichneten Art.

Durch diesen Satz wird der Zusammenhang der Frage nach der Möglichkeit der Quadratur des Zirkels mit der Frage, ob π eine algebraische oder eine transzendente Zahl sei, in das richtige Licht gesetzt. Damit die Quadratur des Zirkels ausgeführt werden könnte, wäre also nicht nur erforderlich, dafs π überhaupt eine algebraische Zahl sei, sondern es müfste π sogar Wurzel einer solchen speziellen algebraischen Gleichung sein, welche durch Quadratwurzeln aufgelöst werden kann, d. h. es müfste π selber durch Quadratwurzeln ausdrückbar sein. Nun haben wir zwar in der Vieta'schen Formel eine Darstellung der Zahl π mittels Quadratwurzeln kennen gelernt, aber die Operation des Wurzelausziehens kommt in dieser Darstellung unendlich oft vor, während die Wurzel einer algebraischen Gleichung der angegebenen Art selbstverständlich durch eine endliche Anzahl von Quadratwurzeln ausdrückbar sein mufs. Die Vieta'sche Formel würde also im Gegenteile eher zu der Vermutung führen, dafs die Zahl π nicht die zur Ausführbarkeit der Quadratur des Zirkels erforderlichen Eigenschaften besitze. Wie dem aber auch sei, jedenfalls würde die Unmöglichkeit der Quadratur des Zirkels dann aufser allem Zweifel sein, wenn es sich herausstellen sollte, dafs die Zahl π überhaupt nicht eine algebraische sondern eine transzendente Zahl ist.

§ 15. Die endgültige Erledigung des Problemes von der Quadratur des Zirkels durch die Arbeiten von Hermite, Lindemann und Weierstrafs.

Die Entscheidung der fundamentalen Frage, ob die beiden Zahlen e und π algebraische oder transzendente seien, verdankt man den Herren Hermite und Lindemann.

Im Jahre 1873 bewies zunächst Herr Hermite in Paris, dafs die Basis der natürlichen Logarithmen eine transzendente Zahl ist, dafs also eine Gleichung von der Form:

$$N_1 e^{x_1} + N_2 e^{x_2} + \cdots + N_r e^{x_r} = 0$$

nicht bestehen kann, wenn $x_1, x_2, \ldots x_r$ von einander verschiedene und $N_1, N_2, \ldots N_r$ beliebige ganze Zahlen, die nicht sämtlich gleich Null sind, bedeuten*).

Ausgehend von dieser grundlegenden Arbeit, insbesondere von den Relationen zwischen gewissen bestimmten Integralen, deren sich Herr Hermite bedient hatte, gelang es dann im Jahre 1882 Herrn Lindemann, das Jahrtausende alte Problem von der Quadratur des Zirkels zur endgültigen Erledigung zu bringen durch den strengen Nachweis, dafs auch die Zahl π eine transzendente Zahl ist.

Dieses Resultat ergab sich aus einem Satze, der als Verallgemeinerung des ersten der beiden oben (pag. 55) erwähnten Lambert'schen Theoreme zu betrachten ist und der folgendermafsen lautet:

Ist z Wurzel einer irreducibeln algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten reelle oder komplexe ganze Zahlen sind, so kann e^z nicht gleich einer rationalen Zahl sein.

Es ist aber nach Euler $e^{\pi i} = -1$, also gleich einer rationalen Zahl. Folglich kann πi, und daher auch π selbst, nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung der angegebenen Art sein. Da sich aber auf diese letztere Form jede algebraische Gleichung mit rationalen Koeffizienten bringen läfst, so folgt:

Die Ludolf'sche Zahl kann nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten sein.

Damit steht aber fest, dafs die Quadratur des Zirkels konstruktiv unausführbar ist**).

---

*) Hermite, Sur la fonction exponentielle (Comptes rendus, Bd. 77).

**) Die Lindemann'schen Untersuchungen sind zuerst mitgeteilt in den Berichten der Berliner Akademie (1882): „Über die Ludolph'sche Zahl" von Prof. F. Lindemann in Freiburg i. Br. Vorgelegt von Herrn Weierstrafs am 22. Juni. Die weitere Ausführung gab Herr Lindemann in der Abhandlung: „Über die Zahl π" (Math. Annalen, Bd. 20, pag. 213—225).

Aber durch den Lindemann'schen Satz, dafs die Zahl π transzendent ist, wird die Frage nach der Quadratur des Zirkels in einem unendlich viel weiteren Umfange beantwortet, als sie ursprünglich gestellt war: Die Quadratur des Zirkels ist nicht nur unmöglich, wenn als konstruktive Hülfsmittel nur Zirkel und Lineal zugelassen werden, sie ist auch unausführbar, wenn bei der Konstruktion überhaupt nur algebraische Kurven und Flächen zur Anwendung kommen sollen. Denn eine Konstruktion mit diesen ganz allgemeinen Hülfsmitteln würde zwar nicht mehr wie früher zu einer Kette von quadratischen Gleichungen führen, aber doch immerhin zu einer Kette von algebraischen Gleichungen, durch welche dann wieder die zu konstruierende Zahl als eine notwendig algebraische bezeichnet würde. Jene Möglichkeit ist also für die transzendente Zahl π ausgeschlossen.

Im Jahre 1885 hat dann Herr Weierstrafs, ohne Voraussetzung der Hermite'schen Abhandlung, die Lindemannschen Sätze auf einem verhältnismäfsig einfachen Wege, aber mit Beibehaltung der leitenden Grundgedanken aufs neue abgeleitet und begründet*).

Zu diesem Zwecke bewies er zunächst mit Hülfe der Integralrechnung den folgenden Satz:

„Es sei $f(z)$ eine ganze Funktion $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades der Veränderlichen z mit gegebenen ganzzahligen Koeffizienten, die so beschaffen sind, dafs die Gleichung

$$f(z) = 0$$

$(n+1)$ von einander verschiedene Wurzeln hat, welche mit

$$z_0, z_1, \ldots z_n$$

bezeichnet werden mögen. Alsdann läfst sich, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Gröfse δ, auf mannigfaltige Weise ein System von $(n+1)$ ganzen Funktionen

$$g_0(z), g_1(z), \ldots g_n(z)$$

des Argumentes z von nicht höheren als dem n^{ten} Grade, deren Koeffizienten sämtlich ganze Zahlen sind, so bestimmen, dafs erstens jede der Differenzen

*) Berichte der Berliner Akademie (1885): Zu Lindemann's Abhandlung „Über die Ludolph'sche Zahl".

$$g_\nu(z_0)\,e^{z_\lambda} - g_\nu(z_\lambda)\,e^{z_0} \qquad \begin{pmatrix}\lambda = 0, 1, \ldots n\\ \nu = 0, 1, \ldots n\end{pmatrix}$$

ihrem absoluten Betrage nach kleiner als δ ist, und zweitens die Determinante

$$|\,g_\nu(z_\lambda)\,| \qquad (\lambda, \nu = 0, 1, \ldots n)$$

einen von Null verschiedenen Wert hat."

Da $e^{\pi i} = -1$ ist und die Funktion e^x nur für solche Werte von x, welche (ungrade) Vielfache von πi sind, den Wert -1 annimmt, so substituierte Herr Weierstrafs dem zu beweisenden Satze von der Transzendenz der Zahl π den folgenden:

„Die Gröfse $e^x + 1$ hat, wenn x eine algebraische Zahl ist, stets einen von Null verschiedenen Wert."

Zum Beweise dieses Satzes wird angenommen, die beliebig gegebene algebraische Zahl x_1 sei Wurzel einer Gleichung r^{ten} Grades:

$$x^r + c_1 x^{r-1} + \cdots + c_r = 0,$$

deren Koeffizienten sämtlich rationale Zahlen sind. Da vorausgesetzt werden darf, dafs $r > 1$ sei, weil für $r = 1$ $e^{x_1} = e^{-c_1}$, also eine positive Gröfse und somit $e^{x_1} + 1$ sicher von Null verschieden wäre, so hat obige Gleichung aufser x_1 noch $(r-1)$ andere Wurzeln, die mit $x_2, \ldots x_r$ bezeichnet werden mögen.

Mit Benutzung des oben angegebenen Hülfssatzes konnte dann Herr Weierstrafs zeigen, dafs das Produkt:

$$(e^{x_1} + 1)(e^{x_2} + 1) \ldots (e^{x_r+1})$$

und somit auch jeder einzelne Faktor desselben einen von Null verschiedenen Wert habe, womit bewiesen war, dafs die Zahl πi und daher auch π selbst eine transzendente Zahl ist.

Herr Weierstrafs wendet sich dann in seiner Abhandlung zu allgemeineren, auf die Exponentialfunktion sich beziehenden Sätzen und beweist namentlich das folgende, von Herrn Lindemann aufgestellte Theorem, in welchem die von Herrn Hermite begonnenen Untersuchungen über die Exponentialfunktion ihren Abschlufs finden:

„Werden unter $x_1, x_2, \ldots x_r$ irgend r von einander verschiedene, unter $X_1, X_2, \ldots X_r$ aber beliebige **algebraische** Zahlen verstanden, so kann die Gleichung

$$\sum_{\varrho=1}^{r} X_\varrho e^{x_\varrho} = 0$$

nur in dem Falle, wo $X_1, X_2, \ldots X_r$ sämtlich den Wert Null haben, bestehen."

In diesem fundamentalen Satze ist der transzendente Charakter der beiden Zahlen e und π gleichzeitig zum Ausdruck gebracht.

Von ganz besonderem Interesse aber ist der von Herrn Lindemann hervorgehobene Spezialfall, der sich ergiebt, wenn man

$$r = 2,\ X_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_1 = x \text{ und } X_2 = X$$

setzt.

Es folgt dann, dafs die Gleichung $e^x = X$ nicht bestehen kann, wenn x, X beide algebraische Zahlen sind und zugleich x einen von Null verschiedenen Wert hat und man erhält die wahre Verallgemeinerung des Lambert'schen, auf die Zahl e bezüglichen Satzes, nämlich:

„Die Exponentialgröfse e^x ist stets eine transzendente Zahl, wenn x eine von Null verschiedene algebraische Zahl ist."

„Der natürliche Logarithmus einer algebraischen Zahl X ist immer eine transzendente Zahl, wenn X nicht den Wert 1 hat."

Diese beiden, von Herrn Lindemann besonders hervorgehobenen Sätze gehören, wie Herr Weierstrafs bemerkt, zu den schönsten Sätzen der Arithmetik.

Aber auch nach der geometrischen Seite hin liefert das allgemeine Lindemann'sche Theorem reiche Ausbeute. Setzt man nämlich, mit Herrn Weierstrafs,

$$r = 3,\ X_1 = i,\ X_2 = -i,\ x_2 = -x_1,\ x_3 = 0$$

und schreibt $\frac{xi}{2}$ für x_1, X für X_3, so ergiebt sich, dafs die Gleichung:

$$2 \sin \frac{x}{2} = X$$

nicht bestehen kann, wenn x, X beide algebraische Zahlen sind und x einen von Null verschiedenen Wert hat.

Daraus erhält man aber einen Satz, der die Unmöglichkeit der Quadratur des Zirkels nur als einen ganz speziellen Fall enthält und die darauf bezüglichen Fragen in gröfster Allgemeinheit und Vollständigkeit abschliefsend beantwortet:

„Ein Kreisbogen, dessen Sehne, durch den Halbmesser des Kreises gemessen, eine algebraisch ausdrückbare Länge hat, kann nicht durch eine geometrische Konstruktion, bei der nur algebraische Kurven und Flächen zur Anwendung kommen, rektifiziert werden; eben so wenig ist der zu einem solchen Bogen gehörige Kreissektor durch eine derartige Konstruktion quadrierbar."

„Hat nämlich in einem Kreise, dessen Halbmesser als Längeneinheit angenommen wird, ein Bogen die Länge x, seine Sehne also die Länge $2 \sin \frac{x}{2}$ und der zugehörige Kreissektor den Inhalt $\frac{1}{2} x$, so würde, wenn durch eine Konstruktion der angegebenen Art der Bogen rektifizierbar oder der Sektor quadrierbar wäre, daraus eine algebraische Gleichung zwischen x und $2 \sin \frac{x}{2}$ sich ergeben. Eine solche Gleichung existiert aber nicht, wenn $2 \sin \frac{x}{2}$, wie angenommen, eine algebraische Zahl ist."

Ein nicht nur durch sein hohes Alter ehrwürdiges, sondern auch, vom mathematisch-historischen Standpunkte aus betrachtet, höchst merkwürdiges Problem hat durch die Lindemann'schen Untersuchungen seine endgültige Erledigung gefunden. Ursprünglich eine rein geometrische Aufgabe von verhältnismäfsig untergeordneter Bedeutung, hat sich die Frage nach der Quadratur des Zirkels im Laufe der Jahrhunderte zu einem arithmetischen Probleme von dem höchsten Interesse herausgebildet. Es hat Teil genommen an allen wichtigeren Wandlungen, welche die mathematischen Anschauungen und Methoden allmählich erfahren haben, es ist mit ihnen und durch sie im Laufe der Zeit selbst umgestaltet worden, bis

sich schliefslich die Fragestellung so abklärte und präzisierte, dafs eine bestimmte Antwort gegeben werden konnte. Es hat aber nicht nur passiv an allen diesen Wandlungen teilgenommen, sondern es hat auch dadurch, dafs es immer und immer wieder und zwar in wechselnder Gestalt den Mathematikern entgegen trat, selbst mächtig fördernd eingewirkt auf die Entwicklung der mathematischen Wissenschaften und insbesondere derjenigen Theorien, welche endlich zur Entscheidung geführt haben.

II.

ARCHIMEDES.

(287—212.)

KREISMESSUNG

(ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ).

I.

Jeder Kreis ist einem rechtwinkligen Dreiecke inhaltsgleich, insofern der Radius gleich der einen der den rechten Winkel einschliefsenden Seiten, der Umfang aber gleich der Basis ist.

Der Kreis $ABCD$ möge sich zu dem Dreiecke E verhalten, wie vorausgesetzt worden ist. Ich behaupte, dafs er diesem gleich sei.

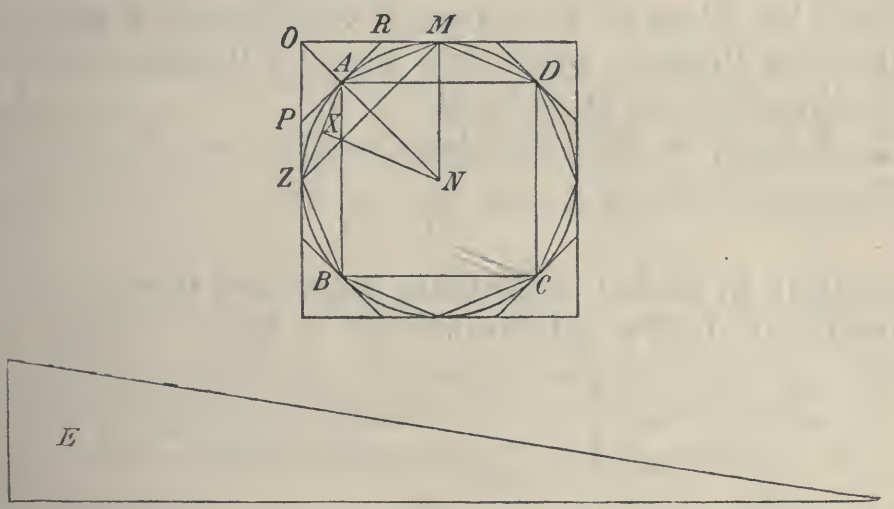

Fig. 1.

Sofern es nämlich möglich ist, sei der Kreis gröfser. Dann schreibe man dem Kreise das Quadrat AC ein und halbiere die Bogen solange, bis die Summe der Segmente kleiner ist als der Überschufs des Kreises über das Dreieck*). Die gradlinige Figur**) ist dann folglich gröfser als das Dreieck. Man nehme den Mittelpunkt N und das Lot NX, so ist NX kleiner als

*) Euklid XII., 2.

**) Nämlich das auf die angegebene Weise erhaltene eingeschriebene reguläre Polygon.

die eine Seite des Dreiecks. Zugleich ist aber auch der Umfang der gradlinigen Figur kleiner als die andere Seite desselben, weil er ja kleiner ist als der Umfang des Kreises. Folglich wäre die gradlinige Figur kleiner als das Dreieck, was doch widersinnig ist.

Es sei jetzt, sofern dies möglich ist, der Kreis kleiner als das Dreieck E. Dann beschreibe man um denselben ein Quadrat, halbiere die Bogen und ziehe in den Teilungspunkten die Tangenten. Der Winkel OAR ist alsdann ein Rechter und folglich ist OR gröfser als MR, da MR gleich RA ist. Demnach ist das Dreieck ROP gröfser als die Hälfte der Figur $OZAM$. Es seien nun zuletzt Abschnitte, so wie PZA, übrig gelassen, welche zusammen kleiner sind als der Überschufs des Dreiecks E über den Kreis $ABCD$*). Die umgeschriebene gradlinige Figur ist dann folglich kleiner als das Dreieck E, was doch widersinnig ist. Denn sie ist gröfser, weil einerseits NA gleich der Höhe des Dreiecks, andererseits aber der Umfang gröfser als die Grundlinie des Dreiecks ist.

Folglich ist der Kreis gleich dem Dreiecke E.

II.

Der Kreis hat zum Quadrate seines Durchmessers (nahezu) ein Verhältnis wie 11 zu 14.

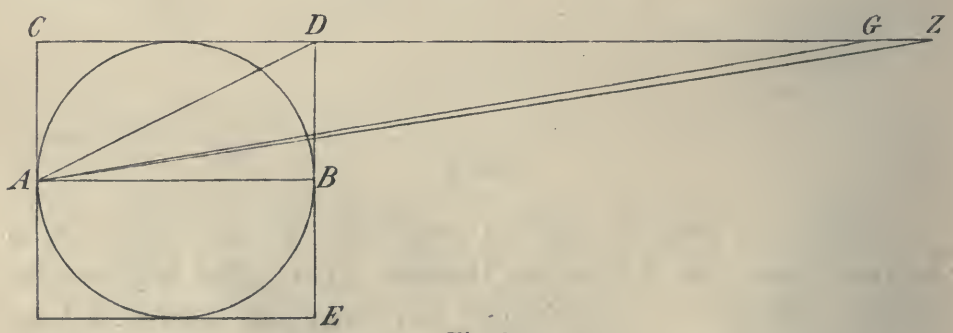

Fig. 2.

Es sei ein Kreis gegeben mit dem Durchmesser AB und es werde das Quadrat CE umgeschrieben; es sei ferner DG doppelt so grofs wie CD und GZ ein Siebentel von CD.

*) Dafs dies möglich ist, folgt mit Rücksicht auf $ROP > \frac{1}{2} OZAM$ aus Euklid X., 1.

Da sich nun ACG zu ACD verhält wie 21 zu 7, dagegen ACD zu AGZ wie 7 zu 1, so verhält sich ACZ zu ACD wie 22 zu 7. Es ist aber das Quadrat CE das Vierfache von ACD und das Dreieck $ACDZ$ gleich dem Kreise AB [da nämlich die Höhe AC gleich dem Halbmesser und die Basis gleich dem Dreifachen des Durchmessers, vermehrt um ein Siebentel desselben, d. h. nahezu gleich der Peripherie ist, wie bewiesen werden wird]*). Also hat der Kreis zu dem Quadrate CE (nahezu) ein Verhältnis wie 11 zu 14.

III.

Der Umfang eines jeden Kreises ist dreimal so grofs als der Durchmesser und noch um etwas gröfser, nämlich um weniger als ein Siebentel, aber um mehr als zehn Einundsiebenzigstel des Durchmessers.

1. Es sei ein Kreis gegeben mit dem Durchmesser AC, dem Mittelpunkte E und der Berührungslinie CLB und es sei der Winkel BEC der dritte Teil eines Rechten. Dann verhält sich EB zu BC wie 306 zu 153, dagegen EC zu CB (nahezu) wie 265 zu 153**).

Nun möge der Winkel BEC durch ED in zwei gleiche Teile geteilt werden. Alsdann verhält sich BE zu EC wie BD zu DC. Durch Zusammensetzung und nachherige Vertauschung folgt daher, dafs BE und EC zusammengenommen sich zu BC verhalten wie EC zu CD. Demnach hat CE zu

---

*) Zu dem eingeklammerten Satze [da nämlich . . . wird] bemerkt Herr Heiberg (Bd. 1, pag. 263 seiner Archimedausgabe) mit Recht: „Hic locus mire corruptus et confusus transcriptori tribuo, qui eum addidit, postquam prop. 2 et 3 permutavit; neque enim Archimedes hanc propositionem ante prop. 3, quo nititur, posuit".

**) Es ist nämlich

$$EB : BC = 2 : 1 = 306 : 153 \quad \text{und} \quad EC : CB = \sqrt{3} : 1.$$

Archimedes mufste also zwei Zahlen bestimmen, deren Quadrate sich nahezu wie 3 : 1 verhalten. Nun ist in der That $265^2 = 70225$ nur um zwei Einheiten kleiner als $3 \cdot 153^2 = 3 \cdot 23409 = 70227$. Es ist also das Verhältnis $EC : CB$ nur um sehr weniges gröfser als 265 : 153.

CD ein gröfseres Verhältnis als 571 zu 153*). Folglich verhalten sich die Quadrate von ED und DC (nahezu) wie 349450 zu 23409 und daher ihre Längen (nahezu) wie $591\frac{1}{8}$ zu 153**).

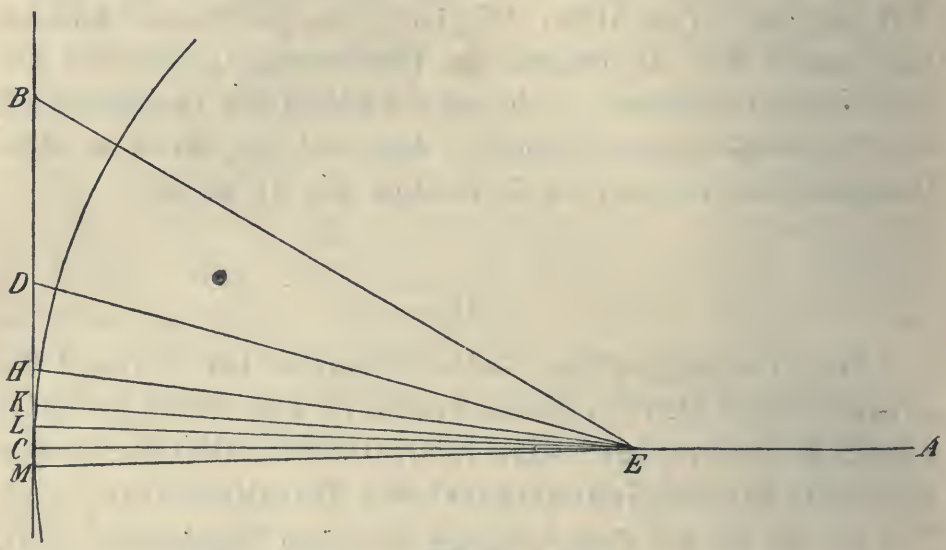

Fig. 3.

Man teile von neuem den Winkel DEC durch EH in zwei gleiche Teile, dann ergiebt sich auf ganz die gleiche Weise, dafs EC zu CH ein gröfseres Verhältnis hat als $1162\frac{1}{8}$ zu 153 und daher HE zu HC in einem gröfseren Verhältnis steht als $1172\frac{1}{8}$ zu 153 ***).

---

*) Es ist nämlich $\frac{BE+EC}{BC} > \frac{306+265}{153}$ d. h. $> \frac{571}{153}$. Archimedes ist somit zunächst zu dem Resultate gekommen, dafs der Radius zu der halben Seite des umgeschriebenen regulären Zwölfecks in einem gröfseren Verhältnis steht als 571 : 153.

**) Es ist nämlich

$$ED^2 : DC^2 > (571^2 + 153^2) : 153^2, \text{ d. h. } > 349450 : 23409$$

und folglich erst recht $ED^2 : DC^2 > \left(591\frac{1}{8}\right)^2 : 153^2$, denn $\left(591\frac{1}{8}\right)^2$ ist gleich $349428\frac{49}{64}$.

***) Es ist demnach das Verhältnis des Radius zu der halben Seite des umgeschriebenen regulären Vierundzwanzigecks gröfser als $1162\frac{1}{8} : 153$. Unter Benutzung der Etappen, die genau denjenigen entsprechen, welche

Man teile ferner den Winkel HEC durch EK in zwei gleiche Teile. Dann hat EC zu CK ein gröfseres Verhältnis als $2334\frac{1}{4}$ zu 153 und folglich EK zu CK ein gröfseres als $2339\frac{1}{4}$ zu 153*).

Man teile noch den Winkel KEC durch LE in zwei gleiche Teile. Dann hat EC zu LC ein gröfseres Verhältnis als $4673\frac{1}{2}$ zu 153**).

Da nun der Winkel BEC, welcher der dritte Teil eines Rechten ist, viermal in gleiche Teile geteilt worden ist, so ist der Winkel LEC der achtundvierzigste Teil eines Rechten. Man lege daher bei E den ihm gleichen Winkel CEM an. Dann ist der Winkel LEM der vierundzwanzigste Teil eines

---

von dem Sechseck zu dem Zwölfeck geführt hatten, gelangt man von diesem zu dem Vierundzwanzigeck durch die folgende, von Archimedes unterdrückte, Zwischenrechnung: Es ist $DE : EC = DH : HC$, folglich $(DE + EC) : DC = EC : CH$, also $EC : CH > \left(591\frac{1}{8} + 571\right) : 153$ d. h. $EC : CH > 1162\frac{1}{8} : 153$. Ferner ist

$$HE^2 : HC^2 > 1373943\frac{33}{64} : 23409, \text{ folglich } HE : HC > 1172\frac{1}{8} : 153,$$

da $\left(1172\frac{1}{8}\right)^2 = 1373877\frac{1}{64}$ ist.

*) Damit ist für das Verhältnis des Radius zu der halben Seite des umgeschriebenen Achtundvierzigecks eine untere Grenze gefunden. Die Zwischenrechnung ist folgende: Es ist $HE : EC = HK : KC$, also

$$(HE + EC) : HC = EC : CK$$

oder

$$EC : CK > \left(1172\frac{1}{8} + 1162\frac{1}{8}\right) : 153 \text{ d. h. } EC : CK > 2334\frac{1}{4} : 153.$$

Ferner ist $EK^2 : CK^2 > 5472132\frac{1}{16} : 23409$, folglich

$$EK : CK > 2339\frac{1}{4} : 153, \text{ da } \left(2339\frac{1}{4}\right)^2 = 5472090\frac{9}{16} \text{ ist.}$$

**) Denn es ist

$$KE : EC = KL : LC, \text{ also } (KE + EC) : KC = EC : LC$$

und folglich

$$EC : LC > \left(2339\frac{1}{4} + 2334\frac{1}{4}\right) : 153, \text{ d. h. } EC : LC > 4673\frac{1}{2} : 153.$$

Rechten und folglich die Linie LM die Seite des dem Kreise umgeschriebenen Polygones von 96 Seiten. Da nun bewiesen worden ist, dafs EC zu CL ein gröfseres Verhältnis hat als $4673\frac{1}{2}$ zu 153, und da AC das Doppelte von EC und LM das Doppelte von CL ist, so hat auch AC zu dem Umfange des Sechsundneunzigecks ein gröfseres Verhältnis als $4673\frac{1}{2}$ zu 14688. Die letztere Zahl ist das Dreifache der ersteren vermehrt um $667\frac{1}{2}$, also um weniger als den siebenten Teil von $4673\frac{1}{2}$. Folglich ist der Umfang des dem Kreise umgeschriebenen Polygones gleich dem Dreifachen des Durchmessers vermehrt um weniger als ein Siebentel desselben. Um so viel mehr ist also der Umfang des Kreises kleiner als das Dreifache des Durchmessers vermehrt um ein Siebentel desselben.

2. Es sei ein Kreis gegeben mit dem Durchmesser AC und es sei der Winkel BAC der dritte Teil eines Rechten.

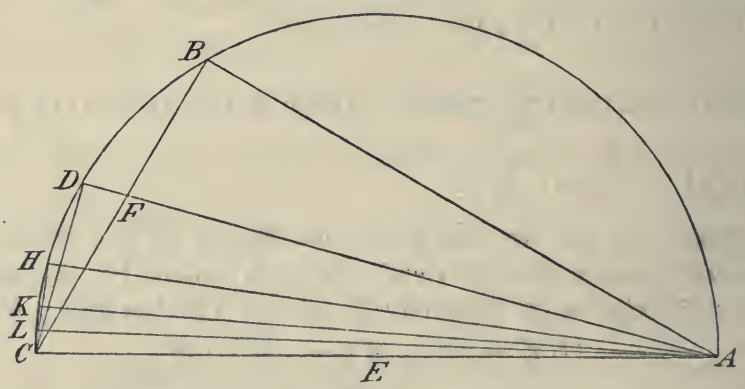

Fig. 4.

Dann hat AB zu BC ein kleineres Verhältnis als 1351 zu 780, dagegen AC zu CB ein solches gleich 1560 zu 780*).

*) Es ist nämlich

$$AC : CB = 2 : 1 = 1560 : 780 \quad \text{und} \quad AB : BC = \sqrt{3} : 1,$$

da BC die Seite des eingeschriebenen Sechsecks ist. Es ist nun in der That $1351^2 = 1825201$ nur um eine Einheit gröfser als

$$3 \cdot 780^2 = 3 \cdot 608400 = 1825200,$$

sodafs das Verhältnis $AB : BC$ nur um sehr weniges kleiner ist als 1351 : 780.

Man teile den Winkel BAC durch AD in zwei gleiche Teile. Da der Winkel BAD gleich dem Winkel DCB, aber auch gleich dem Winkel DAC ist, so ist auch der Winkel DCB gleich dem Winkel DAC. Ferner ist gemeinschaftlich der rechte Winkel ADC. Daher ist auch der dritte Winkel DFC dem dritten Winkel ACD gleich. Folglich ist das Dreieck ADC dem Dreiecke CDF winkelgleich. Es verhält sich demnach AD zu DC wie CD zu DF und wie AC zu CF. Aber wie sich AC zu CF verhält, so verhalten sich auch CA und AB zusammengenommen zu BC*). Und wie sich folglich CA und AB zusammengenommen zu BC verhalten, so verhält sich AD zu DC. Infolge dessen hat also AD zu DC ein kleineres Verhältnis als 2911 zu 780 und AC zu CD ein kleineres als $3013\frac{3}{4}$ zu 780**).

Man teile den Winkel CAD durch AH in zwei gleiche Teile. Dann hat aus genau demselben Grunde AH zu HC ein kleineres Verhältnis als $5924\frac{3}{4}$ zu 780 oder als 1823 zu 240, denn diese beiden sind $\frac{4}{13}$ der andern. Daher verhält sich AC zu CH (nahezu) wie $1838\frac{9}{11}$ zu 240***).

---

*) Da nämlich in dem Dreiecke ABC der Winkel A durch AF halbiert wird, so ist

$$AC : CF = AB : BF = (CA + AB) : (BF + FC).$$

**) Es war $AC : CB = 1560 : 780$ und $AB : BC < 1351 : 780$. Folglich ist $(CA + AB) : BC < 2911 : 780$ und daher auch

$$AD : DC < 2911 : 780.$$

Aus $AD^2 : DC^2 < 8473921 : 608400$ folgt dann

$$(AD^2 + DC^2) : DC^2 < 9082321 : 608400$$

d. h. $AC^2 : CD^2 < 9082321 : 608400$, also erst recht

$$AC : CD < 3013\frac{3}{4} : 780, \quad \text{da} \quad \left(3013\frac{3}{4}\right)^2 = 9082689\frac{1}{16}$$

ist. Damit ist für das Verhältnis des Durchmessers zu der Seite des eingeschriebenen Zwölfecks eine obere Grenze gefunden.

***) Auf genau demselben Wege, auf dem die Proportion

$$(CA + AB) : BC = AD : DC$$

abgeleitet wurde, erhält man $(CA + AD) : DC = AH : HC$, also

Man teile ferner den Winkel HAC durch KA in zwei gleiche Teile. Dann hat AK zu KC ein kleineres Verhältnis als ($3661\frac{9}{11}$ zu 240 oder als)*) 1007 zu 66, denn diese beiden sind $\frac{11}{40}$ der anderen. Folglich verhält sich AC zu CK (nahezu) wie $1009\frac{1}{9}$ zu 66**).

Man teile noch den Winkel KAC durch LA in zwei gleiche Teile. Dann hat AL zu LC ein kleineres Verhältnis als $2016\frac{1}{6}$ zu 66 und AC zu CL ein kleineres als $2017\frac{1}{4}$ zu 66***).

$$AH : HC < \left(3013\tfrac{3}{4} + 2911\right) : 780, \text{ d. h. } < 5924\tfrac{3}{4} : 780$$

oder $< 1823 : 240$. Aus $AH^2 : HC^2 < 3323329 : 57600$ folgt dann

$$(AH^2 + HC^2) : HC^2 < 3380929 : 57600,$$

oder

$$AC^2 : CH^2 < 3380929 : 57600$$

und daher erst recht

$$AC : CH < 1838\tfrac{9}{11} : 240, \quad \text{da} \quad \left(1838\tfrac{9}{11}\right)^2 = 3381252\tfrac{37}{121}$$

ist. Damit ist eine obere Grenze für das Verhältnis des Durchmessers zu der Seite des eingeschriebenen Vierundzwanzigecks gefunden.

*) Die in der Klammer hinzugefügten Worte werden durch den Zusammenhang gefordert.

**) Aus $(CA + AH) : HC = AK : KC$ folgt

$$AK : KC < \left(1838\tfrac{9}{11} + 1823\right) : 240, \text{ oder } < 3661\tfrac{9}{11} : 240,$$

oder $< 1007 : 66$. Aus $AK^2 : KC^2 < 1014049 : 4356$ ergiebt sich dann $(AK^2 + KC^2) : KC^2 < 1018405 : 4356$, oder $AC : CK < 1009\frac{1}{6} : 66$, da $\left(1009\frac{1}{6}\right)^2 = 1018417\frac{13}{36}$ ist. CK ist die Seite des eingeschriebenen Achtundvierzigecks.

***) Denn es ist $(CA + AK) : KC = AL : LC$, woraus sich $AL : LC < 2016\frac{1}{6} : 66$ ergiebt. Aus $AL^2 : LC^2 < 4064928\frac{1}{36} : 4356$ folgt dann $(AL^2 + LC^2) : LC^2 < 4069284\frac{1}{6} : 4356$, oder

$$AC : CL < 2017\tfrac{1}{4} : 66, \text{ da } \left(2017\tfrac{1}{4}\right)^2 = 4069297\tfrac{9}{16}$$

ist. CL aber ist die Seite des eingeschriebenen Sechsundneunzigecks.

Umgekehrt hat daher der Umfang des Polygons zu dem Durchmesser ein gröfseres Verhältnis als 6336 zu $2017\frac{1}{4}$, was mehr als drei und zehn Einundsiebenzigstel von $2017\frac{1}{4}$ ist. Daher übertrifft der Umfang des dem Kreise eingeschriebenen Polygones von 96 Seiten das Dreifache des Durchmessers um mehr als $\frac{10}{71}$ desselben. Folglich übertrifft um so mehr der Kreis das Dreifache des Durchmessers um mehr als $\frac{10}{71}$ desselben.

Der Umfang des Kreises ist demnach dreimal so grofs als der Durchmesser und noch um etwas gröfser, nämlich um weniger als $\frac{1}{7}$, aber um mehr als $\frac{10}{71}$ desselben.

III.

CHRISTIAN HUYGENS.

(1629—1695.)

ÜBER DIE GEFUNDENE GRÖSSE DES KREISES

(DE CIRCULI MAGNITUDINE INVENTA).

Vorwort.

Da ich in bezug auf das alte Problem von der Quadratur des Zirkels, welches zumal bei den der Mathematik Unkundigen an Berühmtheit von keinem anderen übertroffen wird, neuerdings eine Untersuchung ausgeführt habe, die mir der Mühe nicht unwert zu sein scheint, und da ich dabei zu Resultaten gelangt bin, die, wie ich glaube, besser als die bisher bekannten sind, so will ich dieselben mit den Beweisen den Geometern zukommen lassen. Denn ich bin der Ansicht, dafs dieselben nicht nur den Studien jener förderlich sein werden, sondern dafs sie auch gerade durch ihre Neuheit geeignet sein dürften, zur Erforschung noch verborgener Thatsachen anzuspornen, indem ich mir vorstelle, dafs auch auf dem Gebiete, auf welchem sich ehedem alle mit der gröfsten Anspannung ihrer Kräfte bethätigt haben, noch manche des Fleifses nicht unwerte Frucht zu pflücken übrig geblieben ist. Zwar haben vordem schon sehr viele den Ruhm, die Quadratur gefunden zu haben, sich anzueignen versucht und wiederholt die verschiedensten Erfindungen veröffentlicht, Wahres mit Falschem mischend. Aber wir wissen, dafs alles dies von den Kundigeren entweder widerlegt oder mit Verachtung bestraft worden ist und dafs bis heute von allen den Sätzen, auf welche sich jede Ausmessung des Kreises stützte, nur der eine feststeht, nämlich der, dafs der Kreis gröfser ist als das ihm eingeschriebene und kleiner als das ihm umgeschriebene Polygon. Ich aber will jetzt eine sorgfältigere Bestimmung beibringen und zeigen, dafs wenn man zwei Polygone als mittlere Proportionalen zu einem eingeschriebenen und dem dazu ähnlichen umgeschriebenen Polygone konstruiert, der Umfang des kleineren derselben gröfser ist als der Umfang des Kreises, während die Fläche des anderen in demselben

Verhältnisse gröfser ist als die Fläche des Kreises. Und wenn auch dieser Satz unter denjenigen, welche ich beweisen will, als der schwierigste und beachtenswerteste erscheint, so giebt es doch noch andere, welche nicht nur genaueres leisten, sondern sich auch namentlich in der Anwendung als noch brauchbarer erweisen; ich will dieselben aber nicht hier im voraus aufzählen, weil man sie in der Folge besser wird verstehen können. Dagegen wird es nützlich sein kurz auseinanderzusetzen, inwiefern diese Sätze dem Studium der Geometrie förderlich sind, um so mehr als sie sich durch ihre Brauchbarkeit in nicht geringem Grade empfehlen. Da ich nun eine doppelte Bearbeitung des Stoffes vorgenommen habe, insofern ich zunächst dasjenige behandle, dessen Beweis sich nur auf die gewöhnlichen Elemente der Geometrie stützt, und darauf auch die Theorie der Schwerpunkte anwende, so wird man denn in dem ersten Teile auseinandergesetzt finden, auf welche Weise nicht nur für die ganze Kreisperipherie, sondern auch für einen beliebig gegebenen Bogen eine gleichlange gradlinige Strecke bestimmt werden kann; und zwar durch ein für mechanische Konstruktionen leicht anwendbares Verfahren, welches selbst bei den feinsten derselben in keiner Weise versagt. Durch dieses Verfahren kann, wenn wir zur numerischen Berechnung übergehen, das Verhältnis der Kreisperipherie zum Durchmesser, welches Archimedes aus Polygonen von 96 Seiten ermittelt hat, in gleicher Weise durch Benutzung nur eines Zwölfecks gewonnen werden. Während aber ferner aus Polygonen von 10800 Seiten sich denjenigen, welche den alten Weg einschlagen, für die Peripherie kaum die Grenzen 62831852 und 62831855 ergeben, bei einem Durchmesser von 20 000 000 Teilen, gehen, wie man erkennen wird, nach unserer Methode die Grenzen 6283185307179584 und 6283185307179589 hervor; überhaupt gewinnt man allemal gerade die doppelte Anzahl der richtigen Stellen, gleichgültig wie viele Seiten die zur Berechnung benutzten Polygone besitzen. Ich habe übrigens erkannt, dafs dies auf einem ganz bestimmten Grunde beruht, ebenso wie auch das Quadrat einer Zahl meistens doppelt soviele Stellen enthält wie die Zahl selbst. Noch gröfsere Vorteile aber giebt eine Eigenschaft

der Schwerpunkte an die Hand, ja es hat den Anschein, als ob wir hierdurch der Lösung des unbezwinglichen Problemes einigermafsen näher gerückt wären. Brauchen wir doch in der That, um die von Archimedes für die Kreisperipherie gewonnenen Grenzen zu erhalten, jetzt einzig und allein die Seite des eingeschriebenen Dreiecks zu kennen! Aus dem Sechzigeck aber erkennen wir, dafs jene zwischen den Grenzen 31415926538 und 31415926533 enthalten ist, insofern der Durchmesser gleich 10 000 000 000 Teilen gesetzt wird, während nach der gewöhnlichen Methode kaum die Grenzen 3145 und 3140 gewonnen werden. Ich kann somit sagen, dafs ich bei diesem Verfahren mehr als die dreifache Anzahl der richtigen Stellen erhalte, ebenso wie bei dem vorhergehenden die doppelte; und zwar stellt sich dieses Verhältnis fortwährend ein, in ähnlicher Weise, wie etwa bei gröfseren Zahlen der Kubus die dreifache Stellenzahl aufweist.

Wenn daher künftighin irgend jemand die Gröfse der Kreisperipherie falsch bestimmen sollte, so wird derselbe nicht mehr durch eine übergrofse Anzahl von Polygonen widerlegt werden, sondern durch eine kurze, nicht im geringsten verwickelte Rechnung, welche er dann nicht mehr so leicht als eine fehlerhafte wird verdächtigen können, wie dies bisher gewöhnlich geschah. Wenn ferner bei der Zusammenstellung der Sehnentafel, von der ja doch alle wissen, wie sehr es darauf ankommt, dafs dieselbe als fehlerfrei gelte, irgend ein Versehen sollte begangen worden sein oder sonst irgend etwas Verkehrtes sich eingeschlichen haben sollte, so wird es nicht schwer sein, mit Hülfe jener Rechnungen den Fehler wieder gut zu machen, da man jetzt nach einer ganz anderen Methode aus den Kreissehnen die Länge der zugehörigen Bogen finden kann. Ja sogar, wenn man jeder Hülfe von Tafeln beraubt ist, zeige ich, auf welche Weise man aus den gegebenen Seiten eines Dreiecks die Winkel desselben finden kann, und zwar so genau, dafs die Abweichung von dem wahren Werte niemals zwei Sekunden, oft nicht einmal den sechzigsten Teil einer Sekunde beträgt. Fürwahr, ich glaube zuversichtlich, dafs dies nicht als eine unbedeutende Errungenschaft wird angesehen werden. Ich habe übrigens erfahren, dafs auch Renatus Cartesius, durch

dessen Entdeckungen sowohl die gesamte Philosophie als ganz besonders die mathematische Wissenschaft so glänzend erleuchtet worden ist, einiges hierauf bezügliche verfafst habe. Dieses soll nach seinem Tode unter seinen Aufzeichnungen gefunden worden sein, ich habe aber bis jetzt nicht in Erfahrung bringen können, mit welchen Mitteln oder mit welchem Erfolge er diese Untersuchungen angestellt habe. Von Willebrord Snellius aber, dem gelehrten Geometer, ist eine Cyclometrie vorhanden, ein mit grofsem Fleifse verfafstes Werk, dessen Inhalt vollständig in der vorliegenden Abhandlung enthalten ist. Dieser Forscher würde wahrlich kein geringes Lob verdient haben, wenn er die beiden hauptsächlichsten Lehrsätze, auf welchen, wie auf Fundamenten, jenes ganze Werk aufgebaut ist, hätte beweisen können. Aber das, was er dort als Beweise ausgiebt, ist für die aufgestellten Sätze keineswegs beweiskräftig, während allerdings die Sätze selbst, so wie ich sie nach einem beide Male durchaus einleuchtenden Verfahren bewiesen habe, eine sehr bemerkenswerte Wahrheit enthalten.

Ich habe geglaubt, dafs diese Sätze mit Recht in die vorliegende Abhandlung aufzunehmen seien, da ihre Begründung auf dem beruht, was ich selbst gefunden habe.

§ 1. **Lehrsatz I.**

Wenn einem Kreissegment, welches kleiner als der Halbkreis ist, ein gröfstes Dreieck eingeschrieben wird und den alsdann übrig bleibenden Segmenten in gleicher Weise wieder Dreiecke eingeschrieben werden, so wird der Inhalt des zuerst eingeschriebenen Dreiecks kleiner sein als das Vierfache der beiden jenen übrig gebliebenen Segmenten eingeschriebenen Dreiecke zusammengenommen.

Es sei das Kreissegment ABC kleiner als der Halbkreis und BD sein Durchmesser; das gröfste eingeschriebene Dreieck ist dann ABC, d. h. dasjenige Dreieck, welches dieselbe Basis und dieselbe Höhe besitzt wie das Segment. Den beiden übrig bleibenden Segmenten mögen ebenso die gröfsten Dreiecke AEB und BFC eingeschrieben werden. Ich behaupte, dafs

das Dreieck ABC kleiner sei als das Vierfache der beiden Dreiecke AEB und BFC zusammengenommen.

Man ziehe nämlich die Verbindungslinie EF, welche den Durchmesser des Segmentes im Punkte G treffen möge. Weil nun der Bogen AB in E halbiert wird, ist jede der Sehnen EA und EB gröfser als die Hälfte der Sehne AB. Folglich wird das Quadrat über AB kleiner sein als das Vierfache des Quadrates über EB oder EA. Wie sich aber das Quadrat über AB zu dem Quadrate über EB verhält, ebenso verhält sich die Strecke DB zu der Strecke BG; weil ja das Quadrat über AB gleich dem Rechtecke ist, welches aus DB und dem Durchmesser des ganzen Kreises gebildet wird und das Quadrat über EB gleich dem Rechtecke aus demselben Durchmesser und der Strecke BG ist. Es ist daher BD kleiner als das Vierfache von BG. Aber es auch AC kleiner als das Doppelte von EF, weil diese Strecke gleich AB ist. Daraus folgt, dafs das Dreieck ABC kleiner ist als das Achtfache des Dreiecks EBF. Diesem Dreiecke aber sind AEB und BFC einzeln gleich. Also wird das Dreieck ABC kleiner sein als das Vierfache der beiden zuletzt genannten Dreiecke zusammengenommen, w. z. b. w.

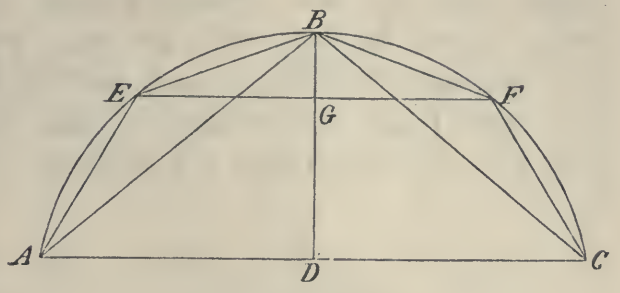

Fig. 1.

§ 2. Lehrsatz II.

Es sei ein Kreissegment gegeben, kleiner als der Halbkreis, und über der Basis desselben ein Dreieck, dessen beide Seitenlinien das Segment berühren; zieht man alsdann noch die Tangente in dem Scheitel des Segmentes, so schneidet diese von dem ersten Dreieck ein Dreieck ab, welches gröfser ist als die Hälfte des dem Segmente eingeschriebenen gröfsten Dreiecks.

Es sei das Kreissegment ABC kleiner als der Halbkreis

und B sein Scheitel. In den Endpunkten der Basis seien die Tangenten AE und CE gezogen, welche sich in E treffen: sie treffen sich, da das Segment kleiner ist als der Halbkreis. Ferner werde die Linie FG gezogen, welche das Segment in dem Scheitel B berührt, und darauf die Verbindungslinien AB, BC. Dann soll bewiesen werden, dafs das Dreieck FEG gröfser ist als die Hälfte des Dreiecks ABC.

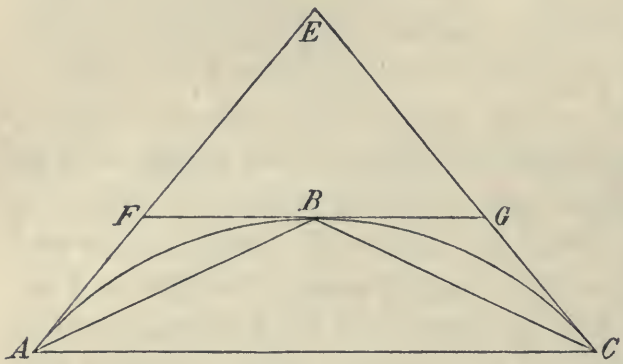

Fig. 2.

Es ist klar, dafs die Dreiecke AEC, FEG und ebenso AFB, BGC gleichschenklig sind und dafs FG in B halbiert wird. Da aber die Summe der Seiten FE und EG gröfser ist als FG, so ist folglich EF gröfser als FB oder als FA und daher die ganze Strecke AE kleiner als das Doppelte von FE. Daher wird das Dreieck FEG gröfser sein als der vierte Teil des Dreiecks AEC. Wie sich aber FA zu AE verhält, so verhält sich die Höhe des Dreiecks ABC zu der Höhe des Dreiecks AEC und die Basis ist bei beiden die gleiche, nämlich AC. Folglich wird, da FA kleiner ist als die Hälfte von AE, das Dreieck ABC kleiner sein als die Hälfte des Dreiecks AEC. Es war aber das Dreieck FEG gröfser als der vierte Teil dieses Dreiecks. Folglich ist das Dreieck FEG gröfser als die Hälfte des Dreiecks ABC, w. z. b. w.

§ 3. Lehrsatz III.

Jedes Kreissegment, welches kleiner als der Halbkreis ist, hat zu dem ihm eingeschriebenen gröfsten Dreiecke ein gröfseres Verhältnis als 4 zu 3.

Es sei ein Kreissegment gegeben, kleiner als der Halbkreis, und es sei ihm das gröfste Dreieck ABC eingeschrieben. Ich behaupte, dafs das Segment zu diesem Dreieck in einem gröfseren Verhältnis stehe als 4 zu 3.

Man schreibe nämlich auch den beiden übrig gebliebenen Segmenten die gröfsten Dreiecke ADB und BEC ein. Dann ist (§ 1) das Dreieck ABC kleiner als das Vierfache jener beiden Dreiecke zusammengenommen und man kann daher einen gewissen Flächenraum zu dem Dreiecke ABC hinzufügen, welcher mit diesem zusammen auch noch kleiner ist als das Vierfache jener Dreiecke ADB und BEC zusammengenommen. Dem entsprechend werde daher das anliegende Dreieck AFC so gewählt, dafs der ganze Flächenraum $ABCF$ kleiner sei als das Vierfache der Dreiecke ADB und BEC zusammengenommen Man denke sich nun in die übrig gebliebenen Segmente wiederum gröfste Dreiecke eingeschrieben, in die dann übrig bleibenden abermals u. s. f. bis die Segmente, denen man zuletzt Dreiecke eingeschrieben hat, zusammengenommen kleiner sind als das Dreieck ACF, was sicherlich einmal eintritt. Dann werden auch diese zuletzt eingeschriebenen Dreiecke zusammengenommen kleiner als das Dreieck ACF sein. Nun ist der vierte Teil des Flächenraumes $ABCF$ kleiner als die beiden Dreiecke ADB und BEC zusammengenommen, der vierte Teil dieser beiden wiederum kleiner als die vier Dreiecke zusammen, welche den übrig gebliebenen Segmenten eingeschrieben sind, und der vierte Teil dieser wiederum kleiner als die darauf folgenden u. s. w., wenn noch mehr Dreiecke eingeschrieben sein sollten. Es wird daher der Flächenraum, welcher sich zusammensetzt aus dem Vierecke $ABCF$ und den übrigen eingeschriebenen Dreiecken, vermehrt noch um den dritten Teil derjenigen, welche zuletzt eingeschrieben worden sind, gröfser sein als $\frac{4}{3}$ des Vierecks $ABCF$. Es ist nämlich von Archimedes bewiesen worden, dafs wenn irgend welche Flächenräume gegeben sind, von denen jeder folgende gleich $\frac{1}{4}$

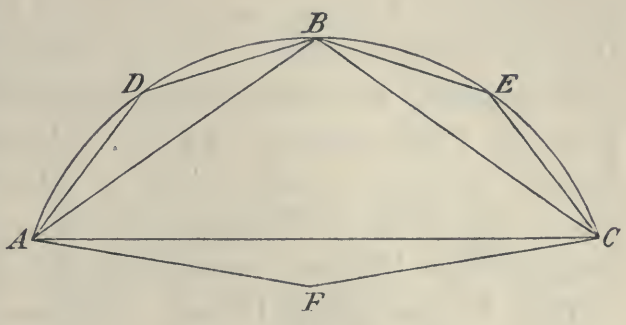

Fig. 3.

des vorhergehenden ist, alle diese Flächenräume zusammen, vermehrt um den dritten Teil des kleinsten, zu dem gröfsten sich verhalten wie 4 zu 3. Durch Absondern folgt daher, dafs alle innerhalb der Segmente ADB und BEC eingeschriebenen Dreiecke, noch vermehrt um den dritten Teil der zuletzt eingeschriebenen, zusammengenommen gröfser sind als der dritte Teil des Flächenraumes $ABCF$. Aber jenes hinzugefügte Drittel ist kleiner als der dritte Teil des Dreiecks ACF. Zieht man daher einerseits den dritten Teil der zuletzt eingeschriebenen Dreiecke und andrerseits von dem Flächenraume $ABCF$ das anliegende Dreieck ACF ab, so werden die sämtlichen innerhalb der Segmente ADB und BEC eingeschriebenen Dreiecke zusammengenommen gröfser sein als der dritte Teil des Dreiecks ABC. Durch Zusammensetzung folgt daher, dafs die ganze gradlinige Figur, welche dem Segmente eingeschrieben ist, und also um so mehr das Segment selbst, gröfser ist als $\frac{4}{3}$ des Dreiecks ABC, w. z. b. w.

§ 4. Lehrsatz IV.

Jedes Kreissegment, welches kleiner ist als der Halbkreis, ist kleiner als zwei Drittel des Dreiecks, welches dieselbe Basis wie jenes besitzt und dessen Seitenlinien das Segment berühren.

Es sei ein Kreissegment gegeben, kleiner als der Halbkreis, und es werde dasselbe in den Endpunkten der Basis von den Geraden AD und CD berührt, welche sich im Punkte D treffen mögen. Ich behaupte, dafs das Segment ABC kleiner sei als zwei Drittel des Dreiecks ADC.

Man ziehe nämlich die Linie EF, welche das Segment in dem Scheitel B berührt und schreibe das gröfste Dreieck ABC ein. Da nun das Dreieck EDF gröfser ist als die Hälfte des Dreiecks ABC (§ 2), so ist klar, dafs man von jenem einen Teil so abschneiden kann, dafs der Rest doch noch gröfser ist als die Hälfte des genannten Dreiecks ABC. Es werde daher in Übereinstimmung hiermit das Dreieck EDG abgeschnitten. Man ziehe nun die Geraden HJ und KL, welche die übrig gebliebenen Segmente AMB und BNC in ihren Scheiteln

berühren, und schreibe diesen Segmenten ihre gröfsten Dreiecke ein. Ebenso verfahre man wiederum mit den übrig bleibenden Segmenten u. s. f., bis zuletzt die Restsegmente zusammengenommen kleiner sind als das Doppelte des Dreiecks EDG. Auf diese Weise wird daher dem Kreissegmente eine gewisse gradlinige Figur eingeschrieben und eine andere umgeschrieben.

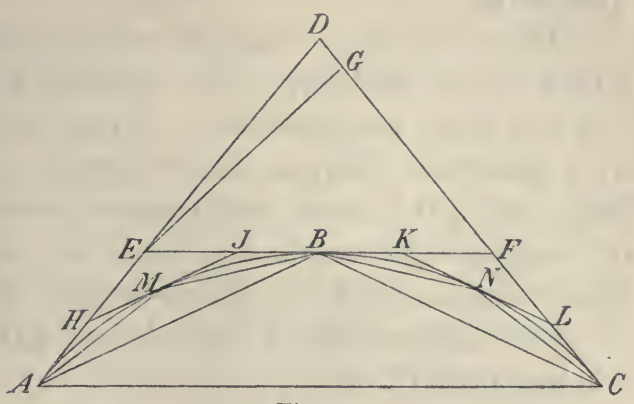

Fig. 4.

Weil nun das Dreieck EGF gröfser ist als die Hälfte des Dreiecks ABC und ferner die Dreiecke HEJ und KFL gröfser sind als die halben Dreiecke AMB und BNC und dies in demselben Verhältnis bei allen folgenden Segmenten stattfindet, nämlich dafs die über den Scheiteln der Segmente konstruierten Dreiecke gröfser sind als die Hälften der entsprechenden innerhalb der Segmente eingezeichneten Dreiecke, so folgt, dafs die sämtlichen aufserhalb des Segmentes gelegenen Dreiecke, auch nach Abzug des Dreiecks EGD, zusammengenommen noch gröfser sind als die Hälfte der sämtlichen innerhalb des Segmentes eingeschriebenen Dreiecke. Nun ist aber auch das Dreieck EGD gröfser als die Hälfte der oben erwähnten Restsegmente. Folglich ist das Dreieck EDF zusammen mit den übrigen aufserhalb des Segmentes befindlichen Dreiecken gröfser als die Hälfte des ganzen Segmentes ABC. Daher wird um so mehr der von den Geraden AD, DC und dem Bogen ABC eingeschlossene Flächenraum gröfser sein als die Hälfte des Segmentes ABC. Daraus folgt, dafs das Dreieck ADC gröfser ist als $\frac{3}{2}$ des Segmentes ABC, w. z. b. w.

§ 5. **Lehrsatz V.**

Jeder Kreis ist gröfser als ein ihm eingeschriebenes gleichseitiges Polygon, vermehrt um den dritten

Teil des Überschusses, um welchen dieses Polygon ein anderes eingeschriebenes von halb so viel Seiten übertrifft.

Es sei ein Kreis gegeben mit dem Mittelpunkte C; demselben werde ein Polygon von gleichen Seiten, von denen eine AB sein möge, eingeschrieben. Ferner sei noch ein zweites eben so beschaffenes Polygon eingeschrieben, von welchem je zwei Seiten AD, DB durch AB gespannt werden. Dieses Polygon ist demnach gröfser als das erste. Es sei der dritte Teil des Überschusses gleich dem Flächenraume H. Ich behaupte, dafs der Kreis gröfser sei als das Polygon ADB, vermehrt um den Flächenraum H.

Man ziehe nämlich aus dem Mittelpunkte die Geraden CA und CB. Da nun das Kreissegment ADB gröfser ist als vier Drittel des ihm eingeschriebenen Dreiecks ADB (§ 3), so werden die Segmente AD und DB zusammengenommen gröfser sein als ein Drittel des Dreiecks ADB. Daher wird auch der Sektor CAB gröfser sein als das Viereck $CADB$, vermehrt um den dritten Teil des Dreiecks ADB. Wie sich aber der Sektor CAB zu dem ganzen Kreise verhält, ebenso verhält sich das Viereck $CADB$ zu dem Polygone ADB und ebenso verhält sich auch der dritte Teil des Dreiecks ADB zu dem dritten Teile des Überschusses des Polygones ADB über das Polygon AB. Daher ist klar, dafs auch der ganze Kreis gröfser ist als das Polygon ADB, vermehrt um den dritten Teil des Überschusses, um welchen das Polygon ADB das Polygon AB übertrifft, d. h. vermehrt um den Flächenraum H, w. z. b. w.

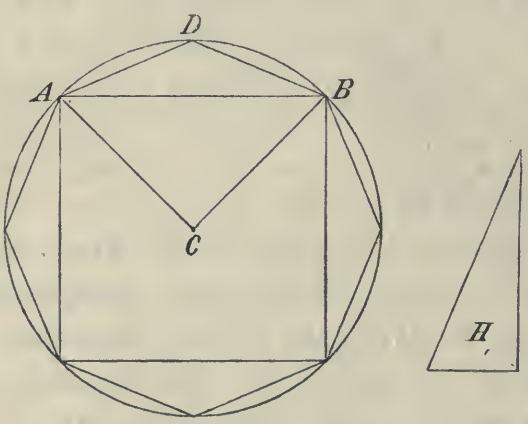

Fig. 5.

§ 6. Lehrsatz VI.

Jeder Kreis ist kleiner als zwei Drittel eines ihm umgeschriebenen gleichseitigen Polygones, vermehrt um ein Drittel des dazu ähnlichen eingeschriebenen Polygones.

Es sei ein Kreis gegeben mit dem Mittelpunkte A; demselben werde ein Polygon von gleichen Seiten, von denen eine BC sein möge, eingeschrieben und ein anderes dazu ähnliches Polygon FEG umgeschrieben, dessen Seiten den Kreis in den Ecken des ersten Polygones berühren. Ich behaupte, dafs der Kreis kleiner sei als zwei Drittel des Polygones FEG, vermehrt um ein Drittel des Polygones BC.

Man ziehe nämlich aus dem Mittelpunkte die Geraden AB und AC. Da sich nun über der Basis des Segmentes BDC das Dreieck BEC erhebt, dessen Seiten das Segment berühren, so wird dieses letztere kleiner sein als zwei Drittel des Dreiecks BEC (§ 4). Wenn daher dem Dreiecke ABC zwei Drittel des Dreiecks BEC, d. h. zwei Drittel des Überschusses des Viereckes $ABEC$ über das Dreieck ABC, hinzugefügt werden, so wird das hieraus zusammengesetzte Flächenstück gröfser sein als der Kreissektor ABC. Es ist aber ganz das Gleiche, ob man dem Dreiecke ABC zwei Drittel des genannten Überschusses hinzufügt oder ob man zwei Drittel des Vierecks $ABEC$ hinzufügt und dagegen zwei Drittel des Dreiecks ABC hinwegnimmt: daraus aber entstehen zwei Drittel des Vierecks $ABEC$, vermehrt um ein Drittel des Dreiecks ABC. Es folgt also, dafs der Sektor ABC kleiner ist als zwei Drittel des Vierecks $ABEC$, vermehrt um ein Drittel des Dreiecks ABC. Nimmt man daher alles so oft, als der Sektor ABC in dem Kreise enthalten ist, so wird auch der ganze Kreis

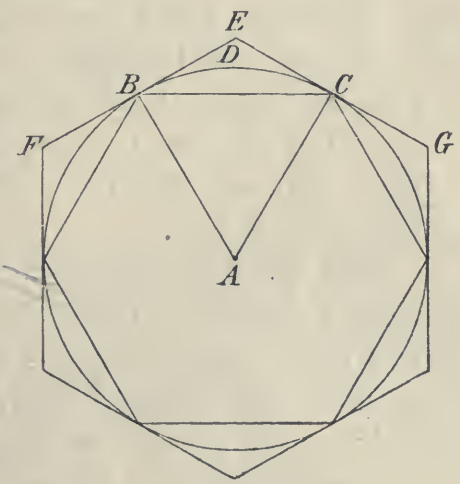

Fig. 6.

kleiner sein als zwei Drittel des umgeschriebenen Polygones FEG, vermehrt um ein Drittel des eingeschriebenen Polygones BC, w. z. b. w.

§ 7. Lehrsatz VII.

Der Umfang eines jeden Kreises ist gröfser als der Umfang eines ihm eingeschriebenen gleichseitigen Polygones, vermehrt um den dritten Teil des Überschusses, um welchen dieser Umfang den Umfang eines andern eingeschriebenen Polygones von halb so viel Seiten übertrifft.

Dem Kreise AB mit dem Mittelpunkte O sei ein gleichseitiges Polygon ACD und ein anderes mit doppelter Seitenzahl $AECBDF$ eingeschrieben. Es sei die Strecke GJ gleich dem Umfange des Polygones $AECBDF$, die Strecke GH aber gleich dem Umfange des Polygones ACD. Der Unterschied der beiden Umfänge ist daher die Strecke HJ, deren dritter Teil JK zu GJ hinzugefügt werden möge. Ich behaupte, dafs der Umfang des Kreises AB gröfser sei als die ganze Strecke GK.

Man schreibe nämlich dem Kreise noch ein drittes gleichseitiges Polygon $ALEMC$ ein, welches doppelt so viele Seiten haben möge als das Polygon $AECBDF$. Ferner konstruiere man über den Strecken GH, HJ und JK Dreiecke, deren gemeinsame Spitze N und deren Höhe gleich dem Halbmesser des Kreises AB sei. Da nun die Basis GH gleich dem Umfange des Polygones ACD ist, so wird das Dreieck GNH gleich dem Polygone sein, welches doppelt so viele Seiten hat, d. h. gleich dem Polygone $AECBDF$. Dies ergiebt sich nämlich, sobald man aus dem Mittelpunkte die Geraden OA und OE zieht, von denen die zweite AC in P schneiden möge. Denn das Dreieck AEO ist gleich einem Dreiecke mit der Basis AP und einer Höhe gleich dem Radius OE. So oft aber das Dreieck AEO in dem Polygone $AECBDF$ enthalten ist, ebenso oft ist die Strecke AP in dem Umfange ACD enthalten. Daher wird das Polygon $AECBDF$ gleich einem Dreiecke sein, dessen Basis gleich dem Umfange ACD

und dessen Höhe gleich dem Radius EO ist, d. h. gleich dem Dreiecke GNH. Aus ganz dem gleichen Grunde wird, da die

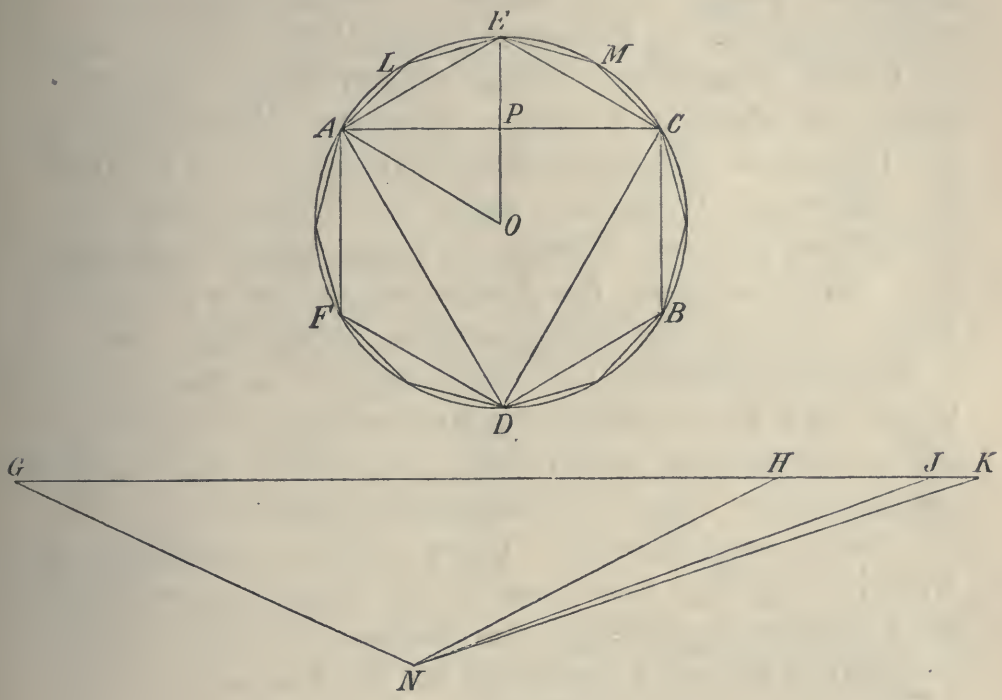

Fig. 7*).

Basis GJ gleich dem Umfange des Polygones $AECBDF$ und die Höhe des Dreiecks GNJ gleich dem Radius des Kreises ist, das Dreieck GNJ gleich dem Polygone $ALEMC$ sein. Daher ist das Dreieck HNJ gleich dem Überschusse des Polygones $ALEMC$ über das Polygon $AECBDF$. Der dritte Teil des Dreiecks HNJ ist aber nach Konstruktion das Dreieck JNK. Folglich wird dieses gleich dem dritten Teile des genannten Überschusses sein. Daher wird (§ 5) das ganze Dreieck GNK kleiner sein als der Kreis AB. Die Höhe des Dreiecks aber ist gleich dem Halbmesser des Kreises. Daher ist klar, dafs die Strecke GK kleiner ist als der ganze Umfang des Kreises, w. z. b. w.

Hieraus ergiebt sich, dafs wenn man von vier Dritteln der Seiten eines einem Kreise eingeschriebenen Polygones ein Drittel der Seiten eines andern eingeschriebenen Polygones von

*) Die Strecken GH und GJ mufsten aus Platzmangel etwas zu klein gezeichnet werden.

halb so vielen Seiten abzieht, der Rest kleiner ist als die Kreisperipherie. Denn es ist ganz dasselbe, ob man zu dem gröfseren Umfange ein Drittel des Überschusses hinzufügt, um welchen derselbe den kleineren Umfang übertrifft, oder ob man ein Drittel des gröfseren Umfanges hinzufügt und dagegen ein Drittel des kleineren Umfanges wegnimmt. Dies giebt aber vier Drittel des gröfseren Umfanges, vermindert um ein Drittel des kleineren. Wenn man daher von 16 Seiten des eingeschriebenen Zwölfecks 2 Seiten des eingeschriebenen Sechsecks, d. h. den Durchmesser des Kreises, abzieht, so wird der Rest kleiner sein als die Kreisperipherie, oder wenn man von 8 Seiten des Zwölfecks den Radius abzieht, so wird der Rest kleiner sein als die Hälfte des Kreisumfanges. Dies ist aber für die mechanische Konstruktion von Nutzen, da, wie später gezeigt werden wird, der Unterschied belanglos ist.

Ferner folgt für jeden Bogen, welcher kleiner als der Halbkreis ist, dafs wenn man zu der Sehne den dritten Teil des Überschusses hinzufügt, um welchen die Sehne den Sinus übertrifft, die Summe kleiner ist als der Bogen.

§ 8. **Lehrsatz VIII.**

Wenn man in dem einen Endpunkte des Durchmessers eines Kreises die Tangente konstruiert und durch den andern Endpunkt des Durchmessers eine Gerade zieht, welche den Kreis schneidet und jene Tangente trifft, so werden zwei Drittel des Abschnittes der Tangente, vermehrt um ein Drittel des Lotes, welches man von dem auf dem Kreise befindlichen Schnittpunkte auf den Durchmesser fällen kann, zusammen gröfser sein als der abgeschnittene, der Tangente anliegende Kreisbogen.

Es sei ein Kreis mit dem Mittelpunkte A und dem Durchmesser BC gegeben und man ziehe in C die Kreistangente CD; mit dieser treffe die von dem anderen Endpunkte des Durchmessers aus gezogene Gerade BD zusammen, welche die Kreisperipherie in E schneide; endlich stehe EF auf dem Durchmesser BC senkrecht. Ich behaupte, dafs zwei Drittel des

Abschnittes CD der Tangente, vermehrt um ein Drittel von EF, zusammen gröfser seien als der Bogen EC.

Man ziehe nämlich die Verbindungslinien AE, EC und konstruiere in E die Kreistangente, welche die Tangente CD in G treffen möge. Dann wird GE gleich GC und ebenso gleich DG sein; denn wenn man um G als Mittelpunkt einen Kreis beschriebe, welcher durch die Punkte C und E ginge, so würde derselbe auch durch den Punkt D gehen, weil der Winkel CED ein Rechter ist. Es wurde aber oben bewiesen, dafs zwei Drittel des Vierecks $AEGC$, vermehrt um ein Drittel des Dreiecks AEC, zusammengenommen gröfser sind als der Sektor AEC (§ 6). Nun ist das Viereck $AEGC$ gleich einem Dreiecke, dessen Basis das Doppelte von CG, d. h. gleich CD, und dessen Höhe CA ist; das Dreieck AEC aber ist gleich einem Dreiecke mit der Basis EF und derselben Höhe AC. Daraus geht hervor, dafs zwei Drittel des Vierecks $AEGC$, vermehrt um ein Drittel des Dreiecks AEC, zusammengenommen einem Dreiecke gleich sind, dessen Basis sich aus zwei Dritteln von CD und einem Drittel von EF zusammensetzt und dessen Höhe gleich dem Radius AC ist. Daher wird auch dieses so gebildete Dreieck gröfser sein als der Sektor AEC. Daraus folgt aber, dafs die Basis desselben, d. h. die aus zwei Dritteln von CD und einem Drittel von EF zusammengesetzte Strecke, gröfser ist als der Bogen CE, w. z. b. w.

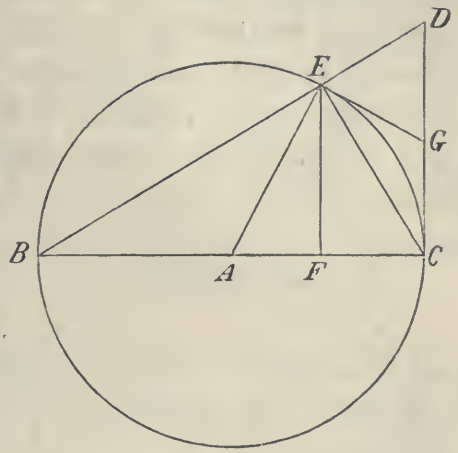

Fig. 8.

§ 9. **Lehrsatz IX.**

Der Umfang eines jeden Kreises ist kleiner als zwei Drittel des Umfanges eines ihm eingeschriebenen gleichseitigen Polygones, vermehrt um ein Drittel des Umfanges des dazu ähnlichen umgeschriebenen Polygones.

Dem Kreise mit dem Mittelpunkte A werde ein gleichseitiges Polygon eingeschrieben, dessen eine Seite CD sei; ein anderes dazu ähnliches mit Seiten, welche den früheren parallel sind, werde umgeschrieben und es sei EF eine dieser Seiten. Ich behaupte, dafs der Umfang des ganzen Kreises kleiner sei als zwei Drittel des Umfanges des Polygones CD, vermehrt um ein Drittel des Umfanges des Polygones EF.

Man ziehe nämlich den Durchmesser BG des Kreises, welcher die Seite CD des eingeschriebenen Polygones in H und zugleich die Seite EF des umgeschriebenen in G halbiert, (es ist übrigens klar, dafs G der Berührungspunkt der Seite EF sein wird). Man mache HL gleich HG und ziehe die Verbindungslinien AC und BC; die Verlängerung von BC treffe die Seite EF in K, während die Verlängerung von AC in die Ecke E des umgeschriebenen Polygones einmündet. Weil nun HL gleich HG ist, wird BL doppelt so grofs sein wie AH. Wie sich daher GA zu AH verhält, ebenso verhält sich auch GB zu BL. Das Verhältnis von HB zu BL aber ist gröfser als das Verhältnis von GB zu BH, weil diese drei Strecken GB, HB, LB sich um gleich viel unterscheiden. Daher wird das Verhältnis von GB zu BL, also auch das von GA zu AH, gröfser sein als das mit sich selbst multiplizierte Verhältnis von GB zu BH. Wie sich aber GA zu AH verhält, ebenso verhält sich auch EG zu CH und wie sich GB zu BH verhält, verhält sich auch KG zu CH. Demnach wird auch das Verhältnis von EG zu CH gröfser sein als das mit sich selbst multiplizierte Verhältnis von KG zu CH. Folglich hat EG zu KG ein gröfseres Verhältnis als KG zu CH. Daher ist EG, vermehrt um CH, sicher gröfser als das Doppelte von KG. Nimmt man nun von allem den dritten Teil, so wird der dritte Teil von EG und

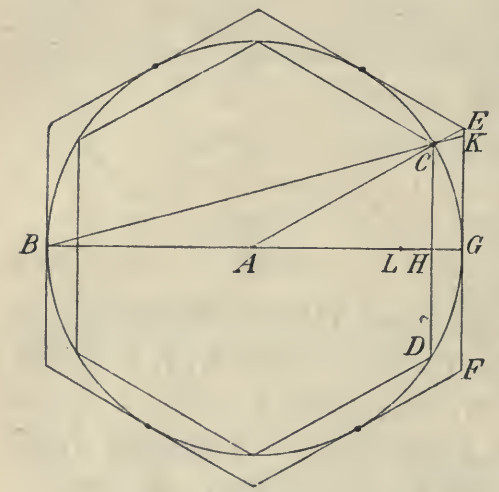

Fig. 9.

CH zusammengenommen gröfser sein als zwei Drittel von KG. Fügt man daher beiderseits noch den dritten Teil von CH hinzu, so wird ein Drittel von EG, vermehrt um zwei Drittel von CH, gröfser sein als zwei Drittel von KG, vermehrt um ein Drittel von CH. Noch kleiner aber als diese letztere Summe ist der Bogen CG (§ 8). Daher sind zwei Drittel von CH, vermehrt um ein Drittel von EG, zusammen sicher gröfser als dieser selbe Bogen CG. Nimmt man demnach alles so oft, als der Bogen CG in der ganzen Kreisperipherie enthalten ist, so werden auch zwei Drittel von dem Umfange des Polygones CD, vermehrt um ein Drittel von dem Umfange des Polygones EF, zusammen gröfser sein als der Umfang des ganzen Kreises, w. z. b. w.

Es ist demnach jeder Kreisbogen, welcher kleiner als ein Quadrant ist, kleiner als zwei Drittel seines Sinus, vermehrt um ein Drittel seiner Tangente.

§ 10. Aufgabe I.

Das Verhältnis der Kreisperipherie zum Durchmesser mit beliebiger Genauigkeit zu finden.

Dafs das Verhältnis der Kreisperipherie zum Durchmesser kleiner sei als $3\frac{1}{7}$, dagegen gröfser als $3\frac{10}{71}$, hat Archimedes mit Hülfe des eingeschriebenen und umgeschriebenen Polygones von 96 Seiten bewiesen. Dasselbe werde ich aber hier mit Hülfe des Zwölfecks zeigen.

Da nämlich eine Seite des dem Kreise eingeschriebenen Zwölfecks gröfser ist als $5176\frac{3}{8}$ solcher Teile, von denen der Radius 10000 enthält, so werden zwölf Seiten, d. h. der Umfang des eingeschriebenen Zwölfecks, gröfser sein als $62116\frac{1}{2}$; der Umfang des eingeschriebenen Sechsecks ist das Sechsfache des Radius, also gleich 60000 Teilen. Daher übertrifft der Umfang des Zwölfecks denjenigen des Sechsecks um mehr als $2116\frac{1}{2}$ Teile. Der dritte Teil des Überschusses wird demnach gröfser sein als $705\frac{1}{2}$. Folglich ist der Umfang des Zwölfecks,

vermehrt um ein Drittel des Überschusses, um welchen dieser den Umfang des Sechsecks übertrifft, gröfser als die Summe von $62116\frac{1}{2}$ und $705\frac{1}{2}$, d. h. gröfser als 62822 Teile. Die Kreisperipherie wird daher sicher gröfser als diese Summe sein (§ 7). Es ist aber das Verhältnis von 62822 zu 20000, der Länge des Durchmessers, gröfser als $3\frac{10}{71}$ zu 1. Also wird auch sicher das Verhältnis der Peripherie zum Durchmesser ein gröfseres sein.

Da andererseits eine Seite des eingeschriebenen Zwölfecks kleiner ist als $5176\frac{2}{5}$, so werden acht Seiten, d. h. $\frac{2}{3}$ des Umfanges, kleiner sein als $41411\frac{1}{5}$. Da ferner eine Seite des umgeschriebenen Zwölfecks kleiner ist als 5359, so werden vier Seiten, d. h. der dritte Teil des Umfanges, kleiner sein als 21436. Daher werden $\frac{2}{3}$ des Umfanges des eingeschriebenen Zwölfecks, vermehrt um den dritten Teil des Umfanges des umgeschriebenen, kleiner sein als $62847\frac{1}{5}$. Aber noch kleiner als jene Summe ist zugleich auch die Peripherie des Kreises (§ 9). Also wird diese zu dem Durchmesser sicher ein kleineres Verhältnis haben als $62847\frac{1}{5}$ zu 20000 und daher ein viel kleineres als $62857\frac{1}{7}$ zu 20000, d. h. als $3\frac{1}{7}$ zu 1. Damit sind für das Verhältnis der Kreisperipherie zum Durchmesser die Grenzen abgeleitet, welche Archimedes aufgestellt hat. Genau dieselben aber werden wir später unter Benutzung sogar nur des eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks bestätigen.

Will man andererseits das Verhältnis genauer finden, so hat man Polygone von mehr Seiten zu betrachten. Man denke daher dem Kreise ein Polygon von 60 Seiten eingeschrieben und ein anderes solches umgeschrieben; und aufser diesen eines von halb so viel Seiten, also ein Dreifsigeck, eingeschrieben. Man findet nun die Seite des eingeschriebenen Sechzigecks gröfser als 10467 191 solcher Teile, deren der Radius 100000000 enthält, und die Seite des Dreifsigecks kleiner als 20905693. Die Hälfte dieser letzteren Seite, nämlich der Sinus des Bogens,

der gleich $\frac{1}{60}$ der Peripherie ist, wird also kleiner als $10452846\frac{1}{2}$ sein; die Sehne dieses Bogens aber war gröfser 10467191. Daher wird die Differenz $14344\frac{1}{2}$ kleiner sein als die wahre. Fügt man den dritten Teil der Differenz, nämlich $4781\frac{1}{2}$, zu der Sehne 10467191 hinzu, so erhält man $10471972\frac{1}{2}$. Gröfser als dies ist folglich der Bogen, der $\frac{1}{60}$ der Peripherie beträgt. Nimmt man aber $10471972\frac{1}{2}$ sechzigmal, so erhält man 628318350; daher enthält die ganze Kreisperipherie sicher mehr als diese Anzahl von Teilen.

Da andererseits eine Seite des eingeschriebenen Sechzigecks kleiner ist als 10467192, so werden zwei Drittel derselben kleiner sein als 6978128. Da ferner eine Seite des umgeschriebenen Sechzigecks kleiner ist als 10481556, so wird ein Drittel derselben kleiner sein als 3493852. Dies zu 6978128 hinzugefügt, giebt 10471980. Diese Summe ist daher sicher gröfser als der sechzigste Teil der Kreisperipherie und das sechzigfache, nämlich 628318800, gröfser als die ganze Peripherie.

Wenden wir nun aber gar Polygone von 10800 Seiten an! Nach der Rechnung Ludolfs von Köln, des ausgezeichneten Arithmetikers, ist die Seite des eingeschriebenen Polygones gleich 58177640912684919 Teilen und einem Bruchteile gefunden worden, und zwar spannt dieselbe 2 Minuten; die Seite des umgeschriebenen dagegen gleich 58177643374063182, vermindert um einen Bruchteil. Überdies ist die Seite des eingeschriebenen Polygones von halb so viel Seiten gleich 116355276902613523, vermindert um einen Bruchteil. Hieraus findet man, dafs die Länge der Kreisperipherie gröfser ist als 6283185307179584, aber kleiner als 6283185307179589 solcher Teile, von denen der Radius 1000000000000000 enthält. Wenn man nach der gewöhnlichen Methode einfach die Seiten des eingeschriebenen sowie diejenigen des umgeschriebenen Polygones addiert, so wird man nur finden, dafs der Kreisumfang gröfser sei als 62831852 Teile und kleiner als 62831855.

Daraus geht hervor, dafs nach unserer Methode mehr als

die doppelte Anzahl der richtigen Stellen gefunden worden ist. Dies wird übrigens in gleicher Weise allemal eintreten, wie viele Seiten auch das benutzte Polygon haben mag. Aus dem aber, was wir in der Folge noch behandeln werden, wird sich ergeben, dafs mit Leichtigkeit sogar die dreifache Zahl der Stellen gewonnen werden kann.

§ 11. Aufgabe II.

Eine Strecke zu bestimmen, welche der Peripherie eines gegebenen Kreises gleich ist.

Es ist oben gezeigt worden, dafs acht Seiten des eingeschriebenen Zwölfecks, vermindert um den Radius des Kreises, kleiner sind als die Hälfte der Peripherie. Bei der Konstruktion aber wird in den meisten Fällen der Unterschied nicht wahrnehmbar sein. Denn wenn man zu der so gefundenen Länge nur den viertausendsten Teil des Durchmessers hinzufügt, so giebt dies bereits mehr als die Hälfte der Peripherie. Dies läfst sich folgendermafsen einsehen. Von den Teilen, von denen 10000 auf den Radius gehen, enthält eine Seite des eingeschriebenen Zwölfecks mehr als $5176\frac{3}{8}$, acht Seiten also mehr als 41411. Nach Abzug des Radius, welcher gleich 10000 ist, wird also der Rest gröfser als 31411 sein. Fügt man hierzu 5 Teile, d. h. $\frac{1}{4000}$ des Durchmessers, so erhält man 31416, also mehr als die Hälfte der Peripherie, wie sich aus dem Vorhergehenden ergiebt. Die Seite des umgeschriebenen Zwölfecks aber wird leicht gefunden, weil der Radius den sechsten Teil des Umfanges spannt. Auch ist dieses Verfahren genauer, als wenn man den Wert $3\frac{1}{7}$ zu Grunde legt, denn bei Benutzung des letzteren wird die halbe Länge der Kreisperipherie um mehr als $\frac{1}{1600}$ des Durchmessers überschritten.

Zweite Lösung.

Es sei ein Kreis gegeben mit dem Durchmesser BC. Man teile den einen Halbkreis BC durch D in zwei, den andern

durch E und F in drei gleiche Teile und ziehe die Verbindungslinien DE und DF, welche den Durchmesser in G und H schneiden mögen. Dann wird eine der beiden Seiten des Dreiecks GDH, vermehrt um die Basis GH, um ein Unbedeutendes gröfser sein als der Quadrant BD und zwar um weniger als $\frac{1}{5000}$ des Durchmessers BC.

Man mufs nämlich wissen, dafs DG oder DH gleich der Summe zweier Seiten des eingeschriebenen Zwölfecks und GH gleich der Seite des umgeschriebenen Zwölfecks ist. Damit ist aber bewiesen, dafs DG, vermehrt um GH, gröfser ist als der Quadrant BD. Denn da (§ 9) acht Seiten des dem Kreise eingeschriebenen Zwölfecks, vermehrt um vier Seiten des umgeschriebenen, gröfser sind als die ganze Peripherie, so werden auch, indem man von allem den vierten Teil nimmt, zwei Seiten des eingeschriebenen, vermehrt um eine Seite des umgeschriebenen, gröfser sein als der Kreisquadrant. Da ferner eine Seite des eingeschriebenen Zwölfecks kleiner ist als 51764 solcher Teile, von denen BC 200000 enthält, so werden zwei Seiten, d. h. GD, kleiner sein als 103528. Eine Seite des umgeschriebenen Zwölfecks aber, also auch GH, ist kleiner als 53590 Teile. Daher geben DG und GH zusammen weniger als 157118. Aus dem Früheren aber ergiebt sich, dafs der Quadrant BD gröfser ist als 157079. Also ist der Unterschied kleiner als 39 Teile, während doch erst 40 Teile $\frac{1}{5000}$ des Durchmessers BC ausmachen würden.

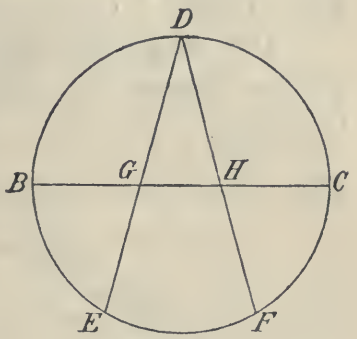

Fig. 10.

Dritte Lösung.

Man füge zu drei Halbmessern $\frac{1}{10}$ einer Seite des eingeschriebenen Quadrates; alsdann wird die Summe der halben Kreisperipherie so nahe kommen, dafs sie nicht um $\frac{1}{10000}$ des Durchmessers zu klein ausfällt. Die Seite des Quadrates ist nämlich gröfser als 141421 solcher Teile, von denen der Radius

100000 enthält, woraus sich leicht die Richtigkeit des Gesagten ergiebt.

Um daher eine der ganzen Kreisperipherie gleiche Strecke zu erhalten, füge man zu sechs Halbmessern $\frac{1}{5}$ jener Seite des eingeschriebenen Quadrates hinzu.

§ 12. Aufgabe III.

Eine Strecke zu bestimmen, welche einem beliebig gegebenen Kreisbogen gleich ist.

Der gegebene Kreisbogen CD, für welchen eine gleich grofse Strecke zu finden ist, sei zunächst kleiner als ein Quadrant.

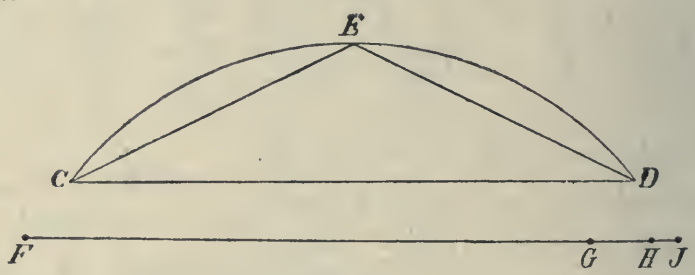

Fig. 11.

Der Bogen CD werde in E halbiert; ferner sei die Strecke FG gleich der Sehne CD und die Strecke FH gleich der Summe der beiden Sehnen CE und ED, welche die halben Bogen spannen. Man füge zu FH die Strecke HJ, nämlich den dritten Teil des Überschusses GH. Dann wird die ganze Strecke FJ dem Bogen CD beinahe gleich sein und zwar so genau, dafs wenn man nur einen einzigen der Teile, deren sie 1200 enthält, hinzufügt, man bereits zuviel erhält, selbst wenn der Bogen CD gleich einem Quadranten sein sollte. Bei kleineren Bogen aber wird der Unterschied noch unbedeutender sein. Wenn nämlich der gegebene Bogen nicht gröfser ist als der sechste Teil der Peripherie, so wird die gefundene Strecke um weniger als $\frac{1}{6000}$ ihrer Länge von der wahren Bogenlänge abweichen.

Dafs die auf die angegebene Weise gefundenen Strecken immer kleiner sind als die Bogen, geht aus dem Lehrsatze VII hervor. Die Gröfse des Unterschiedes aber ist noch Gegenstand des Beweises.

Nimmt man daher zunächst an, der Bogen CD sei gleich einem Kreisquadranten, so wird die Sehne CD, d. h. FG, gleich der Seite des dem Kreise eingeschriebenen Quadrates sein und folglich kleiner als 141422 solcher Teile, von denen der Radius 100000 enthält. CE aber, oder ED, wird die Seite des eingeschriebenen Achtecks sein und daher gröfser als 76536. Das Doppelte von ED aber ist gleich der Strecke FH. Diese ist daher gröfser als 153072. Folglich ist der Überschufs GH gröfser als 11650 und der dritte Teil desselben HJ gröfser als 3883. Daher ist die ganze Strecke FJ gröfser als 156955. Der Bogen CD aber ist, da er gleich dem Kreisquadranten vorausgesetzt wird, kleiner als 157080. Daher unterscheidet sich von diesem die Strecke FJ um weniger als 125 solcher Teile, von denen sie selbst mehr als 156955 enthält. Dies macht aber weniger aus als $\frac{1}{1200}$ von FJ.

Wenn aber der Bogen CD gleich dem sechsten Teile der Kreisperipherie ist, so wird die Sehne CD, d. h. FG, die Seite des eingeschriebenen Sechsecks und daher gleich 10000 Teilen sein, ferner wird CE, oder ED, die Seite des eingeschriebenen Zwölfecks und folglich gröfser als $5176\frac{3}{8}$ sein. Das Doppelte hiervon, nämlich FH, ist also gröfser als $10352\frac{3}{4}$ und daher GH gröfser als $352\frac{3}{4}$ und HJ gröfser als $117\frac{7}{12}$. Die ganze Strecke FJ ist demnach gröfser als $10470\frac{1}{3}$. Der Bogen CD aber, als sechster Teil der Peripherie, ist kleiner als 10472. Daher fehlen der Strecke FJ weniger als $1\frac{2}{3}$ dieser Teile, was noch nicht $\frac{1}{6000}$ von FJ ausmacht.

Ist andererseits der gegebene Kreisbogen gröfser als ein Quadrant, so hat man ihn in 4, 6 oder mehr gleiche Teile zu teilen, je nach dem gewünschten Genauigkeitsgrade, aber immer in eine gerade Anzahl. Zu der Summe der Sehnen dieser Teile hat man dann den dritten Teil des Überschusses hinzuzufügen, um welchen diese die Summe der Sehnen der doppelten Bogen übertrifft. Auf diese Weise wird alsdann die Länge des ganzen Bogens zusammengesetzt werden.

Wenn die Länge eines Bogens gefunden werden soll, der nur um weniges kleiner oder gröfser als die halbe, oder, falls er gröfser als drei Quadranten sein sollte, nur um weniges kleiner ist als die ganze Kreisperipherie, so kann man auch so verfahren, dafs man die Länge dieses Unterschiedes zu der bereits früher gefundenen Länge der halben oder der ganzen Peripherie hinzufügt oder von derselben abzieht.

§ 13. Lehrsatz X.

Die Seite eines dem Kreise eingeschriebenen gleichseitigen Polygones ist mittlere Proportionale zwischen der Seite des dazu ähnlichen umgeschriebenen Polygones und der halben Seite des eingeschriebenen Polygones von halber Seitenzahl*).

In einem Kreise mit dem Mittelpunkte A und dem Radius AB sei BC die Seite eines eingeschriebenen gleichseitigen Polygones und es sei die Seite DE des dazu ähnlichen umgeschriebenen Polygones parallel zu BC. Dann wird die Verlängerung von AB durch D und diejenige von AC durch E gehen. Wird nun die Linie CF senkrecht zu AB gezogen, so wird diese die halbe Seite des eingeschriebenen Polygones von halber Seitenzahl sein. Es ist daher zu beweisen, dafs BC mittlere Proportionale sei zwischen ED und CF.

Man ziehe die Linie AG, welche ED halbiert und daher ein Halbmesser des Kreises, also gleich AB, sein wird. Nun verhält sich ED zu CB wie DA zu AB oder wie DA zu AG. Wie sich aber DA zu AG verhält, ebenso verhält sich auch BC zu CF wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke DAG und BCF. Folglich verhält sich ED zu CB wie CB zu CF, w. z. b. w.

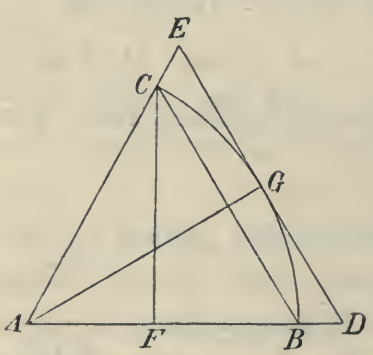

Fig. 12.

*) Vergl. die hiermit verwandten Sätze von Snellius (Cycl. prop. 9) und Gregory (in der pag. 41 genannten Abhandl.). Siehe auch Note III von Legendre's Éléments.

Hülfssatz.

Es sei die Linie BC durch R in zwei gleiche und durch F in zwei ungleiche Teile geteilt und es sei FC der gröfsere Teil. Man mache BO gleich der Summe von BC und CF, dagegen BM gleich der Summe von BC und CR. Dann behaupte ich, es sei das Verhältnis von RB zu BF gröfser als das dreimal mit sich selbst multiplizierte Verhältnis von OB zu BM.

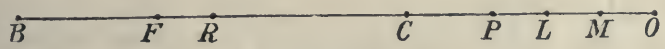

Fig. 13.

Man mache nämlich jede der beiden Strecken ML und LP gleich OM. Weil nun MO gleich RF ist (denn dies geht aus der Konstruktion hervor), so wird PO dreimal so grofs sein wie FR. Es ist aber auch BM dreimal so grofs wie BR. Daher verhält sich BR zu BM wie FR zu PO und daher auch BR zu FR wie BM zu PO. Es ist aber BO gröfser als BM. Folglich wird das Verhältnis von BO zu OP gröfser sein als dasjenige von BR zu RF, woraus sich durch Umwandlung ergiebt, dafs das Verhältnis von OB zu BP kleiner ist als dasjenige von RB zu BF. Da ferner OM und ML einander gleich sind, so wird das Verhältnis von BO zu OM gröfser sein als dasjenige von BM zu ML, woraus wieder durch Umwandlung folgt, dafs das Verhältnis von OB zu BM kleiner ist als dasjenige von MB zu BL. Auf ganz die gleiche Weise wird gezeigt, dafs das Verhältnis von MB zu BL kleiner ist als dasjenige von LB zu BP. Daher wird sicher das dreimal mit sich selbst multiplizierte Verhältnis von OB zu BM kleiner sein als das aus den Verhältnissen OB zu BM, BM zu BL, und BL zu BP zusammengesetzte, d. h. kleiner als das Verhältnis von OB zu BP. Es war aber das Verhältnis von RB zu BF gröfser als dasjenige von OB zu BP. Daher wird sicher das Verhältnis von RB zu BF gröfser sein als das dreimal mit sich selbst multiplizierte Verhältnis von OB zu BM, w. z. b. w.

§ 14. Lehrsatz XI.

Der Umfang eines jeden Kreises ist kleiner als die kleinere der beiden mittleren Proportionalen zwischen den Umfängen zweier ähnlicher Polygone, von denen das eine dem Kreise regelmäfsig eingeschrieben, das andere umgeschrieben ist. Und der Kreis selbst ist kleiner als das zu jenen ähnliche Polygon, dessen Umfang der gröfseren der beiden mittleren Proportionalen gleich ist.

Es sei der Kreis BD gegeben mit dem Mittelpunkte A. Demselben werde ein gleichseitiges Polygon $BCDL$ eingeschrieben und ein dazu ähnliches $HKMN$ umgeschrieben, dessen Seiten denjenigen des ersten parallel sein mögen. Der Umfang des Polygones $HKMN$ sei gleich der Strecke T, der Umfang von $BCDL$ aber gleich der Strecke Z. Zu Z und T

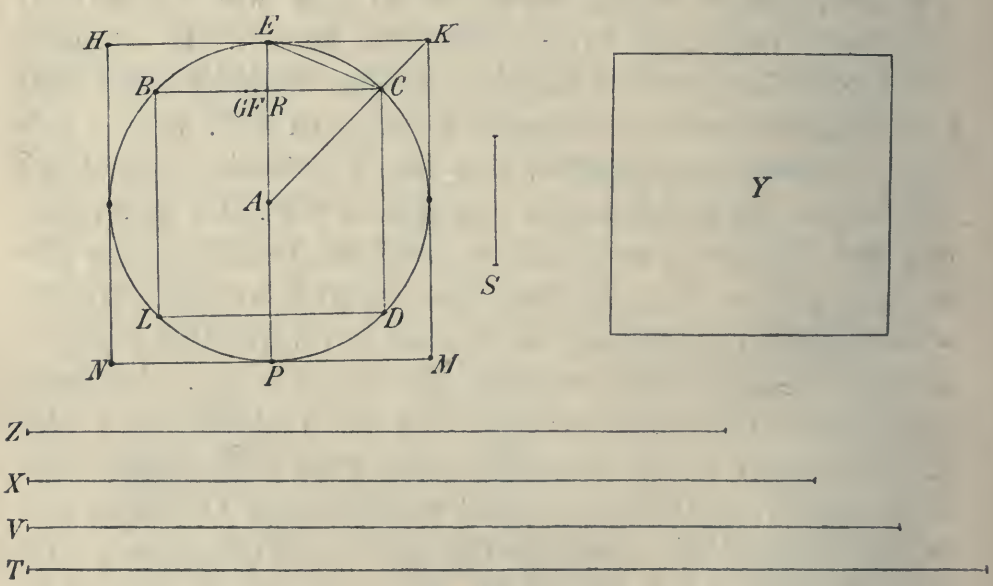

Fig. 14 *).

seien die beiden mittleren Proportionalen X und V konstruiert, von denen X die kleinere sei. Ich behaupte, der Umfang des Kreises sei kleiner als die Strecke X. Man konstruiere ferner das Polygon Y, dessen Umfang der Strecke V gleich sei und

*) Die Strecken Z, X, V, T mufsten aus Platzmangel in der Zeichnung verkürzt werden.

welches überdies dem Polygone $BCDL$ oder $HKMN$ ähnlich sein möge. Dann behaupte ich, dafs der Kreis BD einen kleineren Inhalt habe als das Polygon Y.

Man ziehe nämlich den Kreisdurchmesser PE, welcher die beiden parallelen Seiten BC und HK des eingeschriebenen und des umgeschriebenen Polygones in R und E halbiert; dann wird E der Berührungspunkt der Seite HK sein und BC wird in R rechtwinklig geschnitten werden. Man ziehe noch aus dem Mittelpunkte die Gerade ACK, welche die Winkel C und K der beiden Polygone halbiert, was bekanntlich durch eine und dieselbe Gerade geschieht, und verbinde C mit E. Man mache CF gleich CE und konstruiere zu CR und CF die dritte Proportionale CG. Dann wird (§ 13) CG die Seite desjenigen umgeschriebenen Polygones sein, welches dem eingeschriebenen Polygone mit der Seite CE oder CF ähnlich ist. Daher werden zwei Drittel von CF, vermehrt um ein Drittel von CG, zusammen gröfser sein als der Bogen EC (§ 9). Es seien nun zwei Drittel von CF, vermehrt um ein Drittel von CG, zusammen gleich der Strecke S. Dann wird also auch diese gröfser sein als der Bogen EC.

Da sich nun CR zu CF verhält wie CF zu CG, so verhält sich auch das Doppelte von CR, vermehrt um CF, zu dem Dreifachen von CR — d. h. die Summe von BC und CF zu der Summe von BC und CR — wie sich das Doppelte von CF, vermehrt um CG, verhält zu dem Dreifachen von CF, oder, indem man hiervon den dritten Teil nimmt, wie sich $\frac{2}{3}\,CF$, vermehrt um $\frac{1}{3}\,CG$, verhält zu CF, d. h. wie sich S verhält zu CF. Daher wird auch das dreimal mit sich selbst multiplizierte Verhältnis der Summe von BC und CF zu der Summe von BC und CR gleich dem dreimal mit sich selbst multiplizierten Verhältnisse von S zu CF sein. Es ist aber das Verhältnis von RB zu BF gröfser als das dreimal mit sich selbst multiplizierte Verhältnis der Summe von BC und CF zu der Summe von BC und CR (nach dem Hülfssatze des § 13). Daher ist dieses Verhältnis von RB zu BF auch gröfser als das dreimal mit sich selbst multiplizierte Verhältnis von S zu CF, d. h. gröfser als das Verhältnis des Kubus von S zu dem Kubus von CF. Wie sich aber RB

zu BF verhält, so verhält sich auch der Kubus von RB zu dem mit BF multiplizierten Quadrate von RB. Daher ist auch das Verhältnis des Kubus von RB zu dem mit BF multiplizierten Quadrate von RB gröfser als dasjenige des Kubus von S zu dem Kubus von CF. Nun ist aber das mit BF multiplizierte Quadrat von RB gröfser als das mit FC multiplizierte Rechteck aus RB und BG, was folgendermafsen bewiesen wird. Da nämlich die Strecken RC, CF, CG eine Proportion bilden, so wird der Unterschied zwischen der gröfsten und der mittleren, d. h. FG, gröfser sein als der Unterschied zwischen der mittleren und der kleinsten, d. h. FR. Es ist aber FC gröfser als FB. Daher wird sicher das Verhältnis von CF zu FR gröfser sein als dasjenige von BF zu FG, woraus durch Umwandlung folgt, dafs das Verhältnis von FC zu CR kleiner ist als dasjenige von FB zu BG. Daher ist auch das Verhältnis von FC zu FB kleiner als dasjenige von CR oder RB zu BG, d. h. (indem man BR als gemeinsame Höhe wählt) kleiner als das Verhältnis des Quadrates von RB zu dem Rechtecke aus RB und BG. Daher ist das mit FC multiplizierte Rechteck aus RB und BG kleiner als das mit FB multiplizierte Quadrat von RB, was behauptet worden war.

Da nun also das Verhältnis des Kubus von RB zu dem mit BF multiplizierten Quadrate von RB sich als gröfser erwiesen hatte als das Verhältnis des Kubus von S zu dem Kubus von CF, so wird sicher auch das Verhältnis des Kubus von RB zu dem mit FC multiplizierten Rechtecke aus RB und BG gröfser sein als das Verhältnis des Kubus von S zu dem Kubus von CF. Folglich ist auch das Verhältnis des Kubus von RB zu dem Kubus von S gröfser als das Verhältnis des mit FC multiplizierten Rechteckes aus RB und BG zu dem Kubus von CF, d. h. gröfser als das Verhältnis des Rechteckes aus RB und BG zu dem Quadrate von CF. Das Quadrat von CF aber ist gleich dem Rechtecke aus GC und CR, oder gleich dem Rechtecke aus GC und RB, weil ja die Strecken CR, CF, CG eine Proportion bilden. Daher wird auch das Verhältnis des Kubus von RB zu dem Kubus von S gröfser sein als das Verhältnis des Rechteckes aus RB und BG zu

dem Rechtecke aus GC und RB, d. h. gröfser als das Verhältnis von BG zu GC. Wie sich aber BG zu GC verhält, so verhält sich auch RC zu EK. Da sich nämlich CR zu CG verhält wie das Quadrat von CR zu dem Quadrate von CF, oder dem Quadrate von CE, und da sich ferner das Quadrat von CR zu dem Quadrate von CE verhält wie PR zu dem Durchmesser PE, so verhält sich auch CR zu CG wie PR zu PE. Daher verhält sich das Doppelte von CR, d. h. CB, zu CG, wie das Doppelte von PR zu PE, d. h. wie PR zu PA, und hieraus folgt durch Absondern, dafs sich BG zu GC verhält wie RA zu AP, oder zu AE, d. h. wie RC zu EK, wie behauptet wurde. Daher wird auch das Verhältnis des Kubus von RB zu dem Kubus von S, d. h. das dreimal mit sich selbst multiplizierte Verhältnis von RB zu S, gröfser sein als das Verhältnis von RC zu EK. Es ist aber bewiesen worden, dafs S gröfser ist als der Bogen EC. Daher wird sicher auch das dreimal mit sich selbst multiplizierte Verhältnis von RB, oder RC, zu der Länge des Bogens EC gröfser sein als das Verhältnis von RC zu EK. Wie sich aber RC zu dem Bogen EC verhält, so verhält sich der Umfang des Polygones $BCDL$, d. h. die Strecke Z, zu der Peripherie des Kreises BD; und wie sich RC zu EK verhält, so verhält sich der Umfang des Polygones $BCDL$ zu dem Umfange des Polygones $HKMN$, d. h. Z zu T. Es ist demnach auch das dreimal mit sich selbst multiplizierte Verhältnis von Z zu der ganzen Peripherie BD gröfser als das Verhältnis von Z zu T. Das Verhältnis von Z zu T ist aber gleich dem dreimal mit sich selbst multiplizierten Verhältnisse von Z zu X. Daher ist das Verhältnis von Z zu der genannten Peripherie gröfser als dasjenige von Z zu X. Daraus folgt aber, dafs die Kreisperipherie kleiner ist als die Strecke X, w. z. b. w.

Es ist übrigens zu beachten, dafs X kleiner ist als zwei Drittel von Z, vermehrt um ein Drittel von T, d. h. kleiner als zwei Drittel des Umfanges des eingeschriebenen, vermehrt um ein Drittel desjenigen des umgeschriebenen Polygones; denn dafs die Kreisperipherie kleiner sei als diese Summe, haben wir ja schon früher bewiesen. Es ist nämlich $\frac{2}{3}Z$,

vermehrt um $\frac{1}{3} T$, gleich der kleineren der beiden mittleren arithmetischen Proportionalen und diese ist gröfser als die kleinere der beiden mittleren geometrischen Proportionalen.

Nun wollen wir aber auch noch von dem Polygon Y nachweisen, dafs es gröfser sei als der Kreis BD. Da nämlich das Polygon Y zu dem ihm ähnlichen Polygone $HKMN$ ein Verhältnis hat, welches gleich dem mit sich selbst multiplizierten Verhältnisse ihrer Umfänge ist, und da der Umfang des Polygones Y gleich der Strecke V und der Umfang von $HKMN$ gleich T ist, so wird das Verhältnis des Polygones Y zu dem Polygone $HKMN$ gleich dem mit sich selbst multiplizierten Verhältnisse von V zu T, d. h. gleich dem Verhältnisse von X zu T sein. Wie sich aber das Polygon $HKMN$ zu dem Kreise BD verhält, ebenso verhält sich der Umfang dieses Polygones, d. h. T, zu dem Umfange des Kreises BD; denn das Polygon ist ja gleich einem Dreiecke, dessen Basis gleich dem Umfange des Polygones und dessen Höhe gleich dem Radius AE ist, der Kreis aber gleich einem Dreiecke mit derselben Höhe und dem Kreisumfange als Basis. Durch Verbindung dieser Verhältnisse folgt daher, dafs das Polygon Y sich zu dem Kreise BD verhält wie X zu der Peripherie BD. Es ist aber bewiesen worden, dafs X gröfser ist als die Peripherie BD. Folglich wird auch das Polygon Y gröfser sein als der Kreis BD, w. z. b. w.

Diese Sätze lassen deutlich den Irrtum des Orontius Finaeus*) erkennen, welcher den vierten Teil der Peripherie gleich der kleineren der beiden mittleren Proportionalen zwischen den Seiten des eingeschriebenen und des umgeschriebenen Quadrates ausgegeben hat, den Kreis selbst aber gleich dem aus der gröfseren derselben gebildeten Quadrate.

§ 15. **Lehrsatz XII.**

Wenn man zwischen die Verlängerung eines Kreisdurchmessers und die Peripherie eine Strecke gleich dem Radius einpasst, deren Verlängerung den Kreis

*) Vergl. in bezug auf Orontius Finaeus pag. 30.

schneidet und die in dem anderen Endpunkte des Durchmessers gezogene Tangente trifft, so schneidet diese Linie ein Stück der Tangente ab, welches gröfser ist als der anliegende, auf dem Kreise abgeschnittene Bogen.

Es sei ein Kreis beschrieben mit dem Mittelpunkte C und dem Durchmesser AB. Man verlängere den letzteren über A hinaus und passe zwischen diese Verlängerung und die Kreisperipherie die dem Radius AC gleiche Strecke ED ein. Die Verlängerung derselben schneide die Peripherie in F und treffe in G die Tangente, nämlich diejenige, welche den Kreis in dem Endpunkte B des Durchmessers berührt. Dann behaupte ich, dafs das Stück BG der Tangente gröfser sei als der Bogen BF.

Man ziehe nämlich durch den Mittelpunkt die Gerade HL, parallel zu EG, welche die Kreisperipherie in den Punkten H, M, die Tangente BG aber in L treffen möge. Ferner ziehe man die Verbindungslinie DH, welche den Durchmesser in K schneide. Dann sind die Dreiecke EDK und CHK ähnlich, da ihre Winkel bei K einander gleich sind und der Winkel E gleich dem Winkel C ist. Es ist aber auch die Seite ED gleich der Seite HC und diese Seiten spannen gleiche Winkel. Daher ist auch die Seite DK gleich der Seite KH. Folglich halbiert CA die Linie DH und ebenso den Bogen DAH. Der Bogen DH, oder der ihm gleiche FM, ist demnach doppelt so grofs wie der Bogen AH. Dieser aber ist gleich dem Bogen MB. Daher wird der Bogen FB dreimal so grofs sein wie der Bogen AH. Da andererseits HK der Sinus des Bogens HA und LB die Tangente desselben ist, so werden zwei Drittel von HK, vermehrt um ein Drittel von LB, zusammen gröfser sein als der Bogen AH

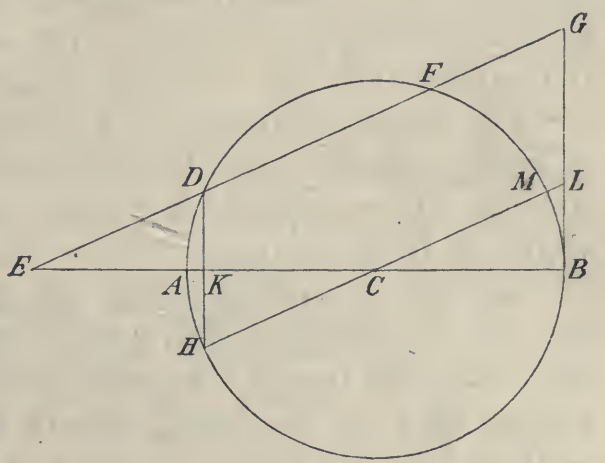

Fig. 15.

(§ 9). Nimmt man daher von allem das Dreifache, so folgt, dafs das Doppelte von HK, d. h. HD oder GL, vermehrt um LB, gröfser sein wird als das Dreifache des Bogens AH, d. h. gröfser als der Bogen FB. Also ist offenbar die ganze Strecke GB gröfser als der Bogen FB, w. z. b. w.

Dieses ist der eine von den beiden Lehrsätzen, auf welchen die ganze Cyclometrie des Willebrord Suellius*) beruht und welche bewiesen zu haben er sich den Anschein geben wollte, während er sich doch einer Beweisführung bediente, die nichts anderes als die Fragestellung enthält. Aber auch den anderen wollen wir folgen lassen, da derselbe aufserordentlich nützlich und der Beachtung in hohem Grade wert ist.

§ 16. **Lehrsatz XIII.**

Wenn man den Durchmesser eines Kreises um den Halbmesser verlängert und durch den Endpunkt der Verlängerung eine Gerade zieht, welche den Kreis schneidet und die in dem entgegengesetzten Endpunkte des Durchmessers gezogene Tangente trifft, so schneidet diese Gerade ein Stück der Tangente ab, welches kleiner ist als der anliegende, auf dem Kreise abgeschnittene Bogen.

Es sei ein Kreis gegeben mit dem Durchmesser AB; dieser werde verlängert und es sei AC gleich dem Halbmesser. Man ziehe die Gerade CL, welche die Kreisperipherie zum zweiten Male in E schneide und in L die Tangente treffe, nämlich diejenige, welche den Kreis in dem Endpunkte B des Durchmessers berührt. Dann behaupte ich, dafs der Abschnitt BL kleiner sei als der Bogen BE.

Man ziehe nämlich die Verbindungslinien AE und EB, mache AH gleich AE und ziehe die Gerade HE, deren Verlängerung die Tangente in K treffen möge. Endlich fälle man auf den Durchmesser AB das Lot EG und auf die Tangente BL das Lot ED. Da nun das Dreieck HAE gleichschenklig ist, so werden die Winkel H und HEA einander gleich sein. Weil aber der Winkel AEB ein Rechter ist, so werden auch

*) Vgl. pag. 38.

die beiden Winkel HEA und KEB zusammen gleich einem Rechten sein. Aber auch die beiden Winkel H und HKB bilden zusammen einen Rechten, weil ja in dem Dreiecke HKB der Winkel B ein Rechter ist. Zieht man daher beiderseits

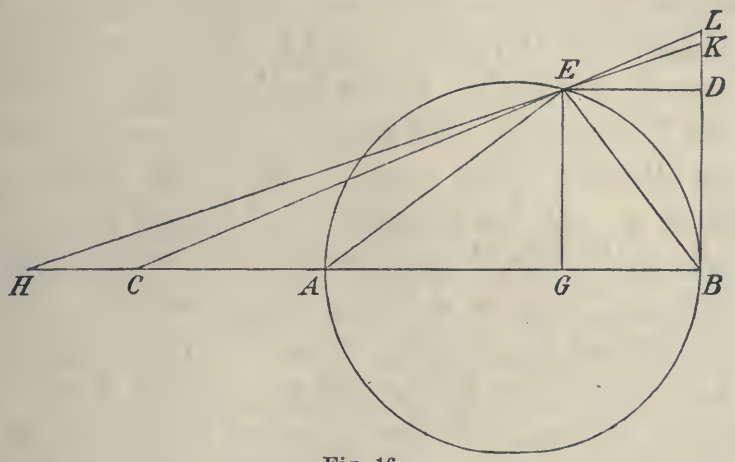

Fig. 16.

Gleiches ab, nämlich von hier den Winkel H, von dort den Winkel HEA, so bleiben die einander gleichen Winkel KEB und HKB übrig. Folglich ist das Dreieck KBE gleichschenklig und die beiden gleichen Seiten desselben sind EB und BK. Es ist aber BD gleich EG. Also ist DK gleich dem Unterschiede, um welchen BE gröfser ist als EG. Da sich ferner AG zu AE verhält wie AE zu AB, so werden AG und AB zusammengenommen gröfser sein als das Doppelte von AE (Euklid V., 25). Also ist AE, oder AH, kleiner als die Hälfte der Summe von AG und AB, d. h. kleiner als AC, vermehrt um die Hälfte von AG. Nimmt man daher beiderseits CA weg, so wird CH kleiner sein als die Hälfte von AG. CA aber ist gröfser als die Hälfte von AG. Fügt man daher AC zu AG, so wird die ganze Strecke CG gröfser sein als das Dreifache von CH. Da sich aber HG zu GE verhält wie ED zu DK und ferner GE zu GC wie LD zu DE, so folgt aus der Vergleichung dieser Verhältnisse, dafs HG zu GC sich verhält wie LD zu DK, woraus durch Umwandlung hervorgeht, dafs GC zu CH sich verhält wie DK zu KL. Daher ist auch DK gröfser als das Dreifache von KL. Es war aber DK der Überschufs von EB über EG. Folglich ist KL kleiner als der dritte Teil dieses Überschusses.

KB aber ist gleich der Sehne EB. Daher wird die Summe von KB und KL, d. h. die ganze Strecke LB, sicher kleiner sein (§ 7) als der Bogen BE, w. z. b. w.

Bei sorgfältiger Beachtung des vorangegangenen Lehrsatzes ergiebt sich aber jetzt, dafs es unmöglich ist, auf der Verlängerung des Durchmessers AB einen andern Punkt zu wählen, welcher von dem Kreise weniger weit entfernt ist als der Punkt C und doch noch dieselbe Eigenschaft besitzt, nämlich dafs allemal, wenn man CL zieht, das Tangentenstück BL kleiner sei als der abgeschnittene Bogen BE.

Übrigens ist die Verwendbarkeit des vorliegenden Satzes eine vielfältige, mag es sich nun darum handeln, die Winkel von Dreiecken zu bestimmen, deren Seiten bekannt sind, und zwar ohne Hülfe von Tafeln, oder seien aus den gegebenen Winkeln die Seiten zu finden, oder sei überhaupt für irgend einen Kreisbogen die Sehne anzugeben. Alles dies ist von Snellius in seiner Cyclometrie sorgfältig abgehandelt worden.

§ 17. Lehrsatz XIV.

Der Schwerpunkt eines Kreissegmentes teilt den Durchmesser desselben so, dafs der bei dem Scheitel befindliche Teil gröfser als der andere, aber kleiner als dreimal die Hälfte desselben ist.

Es sei ABC das Kreissegment (dasselbe werde aber kleiner gewählt als der Halbkreis, da die andern zu dem Satze nicht passen) und es sei BD der Durchmesser des Segmentes, welcher durch den Punkt E halbiert werde. Dann ist zunächst zu zeigen, dafs der Schwerpunkt des Segmentes ABC von dem Scheitel B weiter entfernt ist als der Punkt E; denn dafs er auf dem Durchmesser liegt, haben wir an anderem Orte gezeigt*).

Man ziehe durch E parallel zur Basis eine Gerade, welche die Peripherie in den Punkten F und G schneiden möge. Durch

*) Hier und in den folgenden Paragraphen beruft sich Huygens auf seine Abhandlung: „Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli ex dato portionum gravitatis centro“ (Opera varia I., pag. 309—328). Der aus Symmetriegründen ohne weiteres evidente Satz, dafs der Schwerpunkt eines Hyperbel-, Ellipsen- oder Kreissegmentes stets auf dem Durchmesser liege, bildet den Inhalt des Theorema IV (pag. 318).

diese ziehe man senkrecht zur Basis AC die Geraden KJ und HL, welche mit der Scheiteltangente des Segmentes das Rechteck KL bestimmen. Da nun das Segment kleiner ist als der Halbkreis, so ist klar, dafs die eine Hälfte FL des genannten Rechteckes in dem Segmente $AFGC$ enthalten ist und überdies noch gewisse Flächenstücke AFJ und LGC. Dagegen umfafst die andere Hälfte KG des Rechteckes KL das Segment FBG und zugleich noch die Flächenstücke FBK und BGH. Da diese Flächenstücke sich vollständig oberhalb der Geraden FG befinden, so wird auch ihr gemeinsamer Schwerpunkt oberhalb derselben Geraden gelegen sein. Der Punkt E aber in dieser Geraden FG ist der Schwerpunkt des ganzen Rechteckes KL. Daher wird der Schwerpunkt des übrig bleibenden Flächenstückes $BFJLGB$ sich unterhalb der Geraden FG befinden. Aber auch der gemeinsame Schwerpunkt der Flächenstücke AFJ und LGC liegt unterhalb dieser selben Geraden FG. Daher wird auch der Schwerpunkt des aus diesen beiden und jenem Flächenstücke $BFJLGB$ zusammengesetzten Flächenstückes — dies ist aber das Segment ABC — notwendigerweise unterhalb der Geraden FG, also unterhalb des Punktes E, sich befinden.

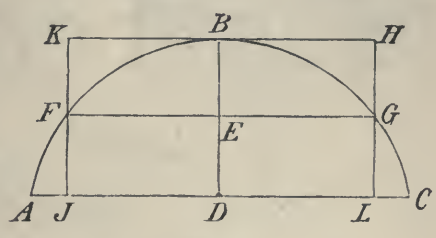

Fig. 17.

Derselbe Durchmesser BD werde nunmehr in S (Fig. 18) so geteilt, dafs BS anderthalbmal so grofs ist wie das übrig bleibende Stück SD. Ich behaupte, dafs der Schwerpunkt des Segmentes ABC von dem Scheitel B weniger weit entfernt sei als der Punkt S.

Es sei nämlich BDP der Durchmesser des ganzen Kreises und es werde durch S parallel zu der Basis eine Gerade gezogen, welche die Kreisperipherie in F und G schneiden möge. Überdies denke man eine Parabel gezeichnet, deren Scheitel B, deren Achse BD und deren Parameter*) gleich SP ist. Dieselbe treffe die Basis des Kreissegmentes in H und K. Da

*) Der Ausdruck Parameter für *latus rectum* ist 1639 von Desargues eingeführt worden.

nun das Quadrat von FS gleich dem Rechtecke aus BS und SP ist, d. h. gleich demjenigen, welches aus BS und dem Parameter der Parabel gebildet wird, so wird die letztere durch F und ebenso durch G gehen. Es werden aber die Teile BF und BG der parabolischen Linie ganz innerhalb, die andern, FH und GK, dagegen aufserhalb des Kreises liegen. Dies wird nämlich dadurch bewiesen, dafs man zwischen B und S eine Ordinate NL zieht, welche die Kreislinie in N, die Parabel aber in M treffen möge. Denn da das Quadrat von NL gleich dem Rechtecke aus BL und LP, das Quadrat von ML aber gleich dem Rechtecke aus BL und SP ist, so wird, da das Rechteck aus BL und LP gröfser ist als dasjenige aus BL und SP, das Quadrat von NL gröfser sein als das Quadrat von ML und daher auch NL selbst gröfser als ML. Genau dasselbe aber wird eintreffen, wo man auch zwischen B und S eine Ordinate ziehen möge. Daher mufs notwendig der Teil BF der Kreislinie ganz aufserhalb der Parabel liegen und aus demselben Grunde auch der Teil BG. Da andererseits das Rechteck aus BD und DP gleich dem Quadrate von DA, das Rechteck aber aus BD und SP gleich dem Quadrate von DH ist, so wird, in bezug auf das Quadrat und daher auch in bezug auf die Länge, HD gröfser sein als AD. Und genau dasselbe wird sich herausstellen, wo auch zwischen S und D eine Ordinate möge angebracht werden. Daher fallen die Teile FA und GC der Kreislinie in das Innere der Parabel. So entstehen also gewisse Flächenstücke $FNBM$ und BQG und ebenso andere HFA und GCK. Da die beiden letzteren sich vollständig unterhalb der Geraden FG befinden, so wird auch

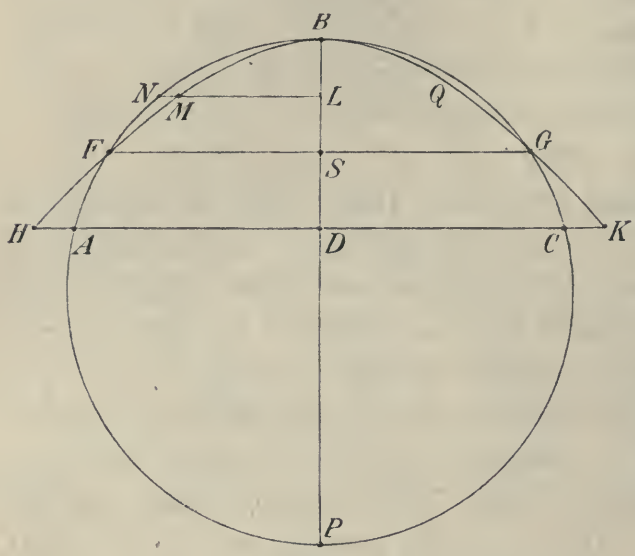

Fig. 18.

ihr gemeinsamer Schwerpunkt unterhalb derselben liegen. Der Schwerpunkt des Parabelsegmentes HBK aber befindet sich auf FG, nämlich in dem Punkte S (Archimedes: Vom Gleichgewichte der Ebenen; 2tes Buch 8ter Satz*)). Daher wird der Schwerpunkt des übrig bleibenden Teiles $AFMBQGC$ oberhalb der Geraden FG liegen. Aber oberhalb derselben liegt auch offenbar der gemeinsame Schwerpunkt der Flächenstücke $FMBN$ und BQG, da diese ja vollständig oberhalb FG sich befinden. Daher wird auch der Schwerpunkt des aus diesen beiden und jenem Flächenstücke $AFMBQGC$ zusammengesetzten Flächenstückes, d. h. des Kreissegmentes ABC, oberhalb der Geraden FG zu suchen sein und da er auf dem Durchmesser BD liegt, so wird er von dem Scheitel B weniger weit entfernt sein als der Punkt S, w. z. b. w.

§ 18. Lehrsatz XV.

Ein Kreissegment, welches kleiner ist als der Halbkreis, hat zu dem ihm eingeschriebenen gröfsten Dreiecke ein gröfseres Verhältnis als vier zu drei, dagegen ein kleineres als $3\frac{1}{3}$ des Durchmessers des von dem Kreise übrig gebliebenen Segmentes zu dem Kreisdurchmesser, dieser vermehrt um den dreifachen Abstand des Kreismittelpunktes von der Basis des Segmentes.

Es sei ein Kreissegment, kleiner als der Halbkreis, gegeben und demselben das gröfste Dreieck ABC eingeschrieben. Es sei BD der Durchmesser des Segmentes, BF der Durchmesser des Kreises, von welchem das Segment abgeschnitten worden ist, und E der Kreismittelpunkt. Dann ist zunächst zu zeigen, dafs das Verhältnis des Segmentes ABC zu dem eingeschriebenen Dreiecke gröfser ist als $\frac{4}{3}$.

Es sei G der Schwerpunkt des Segmentes ABC und es

*) Siehe Band II., pag. 212—216 der Heiberg'schen Ausgabe. Der Satz des Archimedes sagt aus, dafs der Schwerpunkt eines jeden Parabelsegmentes den Durchmesser so teilt, dafs der bei dem Scheitel befindliche Teil desselben anderthalb mal so grofs ist als der an der Basis gelegene.

werde DF in H so geteilt, dafs HD doppelt so grofs ist wie der Rest HF. Weil nun FB doppelt so grofs ist wie EB, DB aber kleiner als das Doppelte von GB, so wird das Verhältnis von FB zu BD gröfser sein als dasjenige von EB zu BG. Hieraus ergiebt sich durch Umwandlung, dafs das Verhältnis von BF zu FD kleiner als dasjenige von BE zu EG und folglich auch das Verhältnis von BF zu BE (welches gleich 2 zu 1 ist) kleiner ist als das Verhältnis von FD zu EG. Demnach ist FD gröfser als das Doppelte von EG. Es enthält aber die Strecke HD zwei Drittel von FD. Folglich ist HD gröfser als vier Drittel von EG. Wie sich aber HD zu EG verhält, ebenso verhält sich das Segment ABC zu dem ihm eingeschriebenen Dreiecke: dies haben wir nämlich früher gezeigt in den Lehrsätzen über die Quadratur der Hyperbel, der Ellipse und des Kreises*). Folglich ist das Verhältnis des Segmentes zu dem eingeschriebenen Dreiecke ABC gröfser als $\frac{4}{3}$.

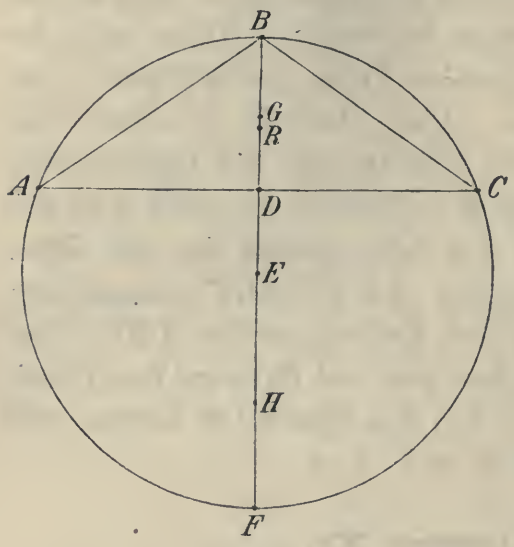

Fig. 19.

Dafs aber das Segment zu dem Dreiecke ABC ein kleineres Verhältnis hat als $3\frac{1}{3}$ von DF zu dem um das Dreifache von ED vergröfserten Durchmesser BF des Kreises, soll jetzt folgendermafsen bewiesen werden. Es möge der Durchmesser des Segmentes in R so geteilt werden, dafs BR dreimal die

*) Nämlich in dem Theorema VII der auf Seite 118 genannten Theoremata. Der Satz, um den es sich hier handelt, folgt unmittelbar durch eine einfache planimetrische Betrachtung aus der bekannten Formel, nach welcher der Abstand des Schwerpunktes eines Kreissegmentes von dem Kreismittelpunkte gleich $\frac{s^3}{12\,S}$ ist, insofern s die Basis und S den Inhalt des Segmentes bedeutet.

Hälfte des Restes RD betrage. Dann fällt der Punkt R zwischen G und D (nach dem vorhergehenden Paragraphen), da ja G der Schwerpunkt des Segmentes ABC ist. Weil nun das Segment zu dem eingeschriebenen Dreiecke dasselbe Verhältnis besitzt wie HD zu EG, wie eben erst angegeben worden ist, das Verhältnis von HD zu EG aber kleiner ist als dasjenige von HD zu ER, so wird auch das Verhältnis des Segmentes zu dem eingeschriebenen Dreiecke kleiner sein als das Verhältnis von HD zu ER oder auch des Fünffachen von HD zu dem Fünffachen von ER. Aber HD (welches ja gleich zwei Dritteln von DF ist), fünfmal genommen, giebt zehn Drittel, d. i. drei und ein Drittel, von DF. ER aber, welches sich aus ED und zwei Fünfteln von DB zusammensetzt, fünfmal genommen, giebt das Doppelte von BD und das Fünffache von ED, d. h. das Doppelte von BE und das Dreifache von ED. Daher leuchtet ein, dafs das Segment ABC zu dem eingeschriebenen Dreiecke ein kleineres Verhältnis besitzt als drei und ein Drittel von DF zu dem Doppelten von EB, d. h. dem Durchmesser BF, dieser vermehrt um das Dreifache von ED, w. z. b. w.

§ 19. Lehrsatz XVI.

Jeder beliebige Kreisbogen, welcher kleiner ist als die halbe Peripherie, ist gröfser als seine Sehne, vermehrt um ein Drittel des Unterschiedes, um welchen die Sehne den Sinus übertrifft. Er ist aber kleiner als die Sehne, vermehrt um eine Gröfse, welche sich zu dem erwähnten Drittel verhält wie die um den Sinus vermehrte vierfache Sehne zu der um den dreifachen Sinus vermehrten doppelten Sehne.

Es sei ein Kreis gegeben mit dem Mittelpunkte D und dem Durchmesser FB. Der Bogen BA sei kleiner als die halbe Peripherie; dann ziehe man die Sehne BA und den Sinus AM, der bekanntlich auf dem Durchmesser FB senkrecht steht. Es sei ferner die Strecke GH gleich AM und GJ gleich der Sehne AB. Daher ist HJ der Überschufs, dessen dritter Teil JK zu GJ hinzugefügt werden möge. Dann wäre zunächst zu zeigen, dafs der Bogen AB gröfser ist als

die ganze Strecke GK. Aber dies ist bereits in dem Lehrsatze VII bewiesen worden. Man füge daher jetzt zu der Strecke GJ eine Strecke JO hinzu, welche sich zu JK, dem dritten Teile von HJ, verhält wie das Vierfache von GJ, vermehrt um GH, zu dem Doppelten von GJ, vermehrt um das Dreifache von GH. Dann behaupte ich, dafs die ganze Strecke GO gröfser sei als der Bogen AB.

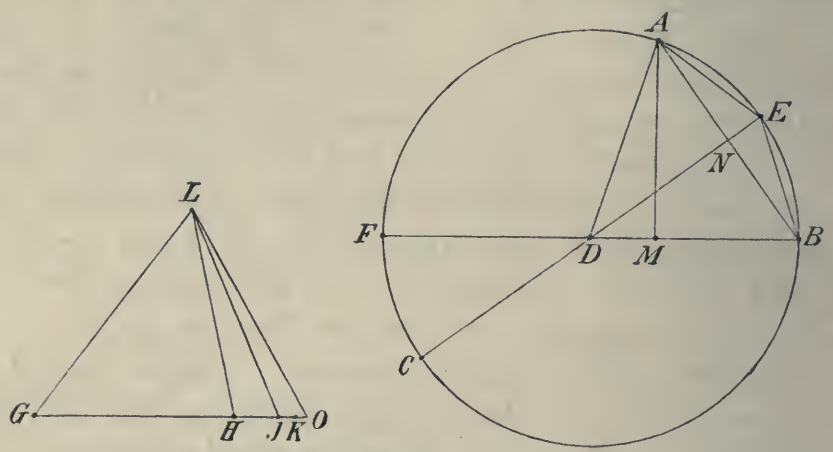

Fig. 20.

Man konstruiere nämlich über den Strecken GH, HJ, JO Dreiecke, deren gemeinsame Spitze L, deren Höhe aber gleich dem Radius DB sei. Man verbinde D mit A und ziehe den Kreisdurchmesser CE, welcher die Sehne AB in N, den Bogen AB aber in E halbiert. Man verbinde sodann E mit A und B.

Da sich nun OJ zu JK verhält wie das Vierfache von GJ, vermehrt um GH, zu dem Doppelten von GJ, vermehrt um das Dreifache von GH, so wird sich auch, indem man je die zweiten Glieder verdreifacht, OJ zu JH (dies ist nämlich das Dreifache von JK) verhalten wie das Vierfache von GJ, vermehrt um GH, zu dem Sechsfachen von GJ, vermehrt um das Neunfache von GH. Durch Umformung folgt dann, dafs OH zu HJ sich verhält wie das Zehnfache der Summe von JG und GH zu dem Sechsfachen von JG, vermehrt um das Neunfache von GH, oder, indem man von diesen Gröfsen den dritten Teil nimmt, wie zehn Drittel von GJ und GH zusammen zu dem Doppelten von GJ, vermehrt um das Drei-

fache von GH. Das Verhältnis von GJ zu GH, d. h. von BA zu AM, ist aber, wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke BAM und BDN, dasselbe wie dasjenige von BD zu DN. Daher verhält sich auch OH zu HJ wie zehn Drittel der Summe von BD und DN zu dem Doppelten von BD, vermehrt um das Dreifache von DN, d. h. wie zehn Drittel von NC zu dem Durchmesser EC, vermehrt um das Dreifache von DN. Kleiner aber als dieses letztere Verhältnis ist nach dem Vorhergegangenen das Verhältnis des Segmentes AEB zu dem Dreiecke AEB. Daher ist dieses Verhältnis des Segmentes zu dem Dreiecke auch kleiner als das Verhältnis von OH zu HJ, d. h. kleiner als das Verhältnis des Dreieckes OHL zu dem Dreiecke JHL. Das Dreieck JHL aber ist gleich dem Dreiecke AEB, was folgendermafsen bewiesen wird. Das Dreieck GHL nämlich ist gleich dem Dreiecke DAB, weil ihre Grundlinien und Höhen wechselseitig gleich sind. Aus ähnlichem Grunde, nämlich weil GJ gleich AB ist, wird das Dreieck GJL gleich der Summe der beiden Dreiecke DAE und DBE, d. h. gleich dem Vierecke $DAEB$, sein. Daher mufs das Dreieck HJL dem Dreiecke AEB gleich sein, wie behauptet wurde. Es wird also auch das Segment AEB zu dem ihm eingeschriebenen Dreiecke AEB ein kleineres Verhältnis haben als das Dreieck OHL zu demselben Dreiecke AEB. Folglich ist das Dreieck OHL gröfser als das Segment AEB und daher das ganze Dreieck OGL gröfser als der Sektor $DAEB$. Die Höhe des Dreieckes GLO aber ist gleich dem Radius DB. Also ist die Basis GO gröfser als der Bogen AB, w. z. b. w.

Hieraus aber ergiebt sich, dafs man auch in bezug auf die ganze Kreisperipherie folgenden Satz aussprechen kann:

Wenn einem Kreise zwei gleichseitige Polygone eingeschrieben werden, von denen das eine doppelt so viele Seiten zählt wie das andere, und wenn man den dritten Teil des Unterschiedes der Umfänge zu dem Umfange des gröfseren Polygones hinzufügt, so wird die hieraus gebildete Summe kleiner sein als die Kreisperipherie. Wenn man aber zu demselben gröfseren Umfange eine Strecke hinzufügt, welche sich zu dem erwähnten dritten Teile des Unterschiedes verhält

wie das Vierfache des gröfseren Umfanges, vermehrt um den kleineren Umfang, zu dem Doppelten des gröfseren, vermehrt um das Dreifache des kleineren, so wird die Summe gröfser sein als die Kreisperipherie.

§ 20. **Aufgabe IV.**

Das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser zu ermitteln und aus gegebenen Strecken, die einem gegebenen Kreise eingeschrieben sind, die Länge der Bogen zu finden, durch welche jene gespannt werden.

Es sei ein Kreis gegeben mit dem Mittelpunkte D und dem Durchmesser CB und es sei der Bogen BA gleich dem sechsten Teile der Peripherie; man ziehe seine Sehne AB und ebenso seinen Sinus AM.

Setzt man nun den Halbmesser DB gleich 100000 Teilen, so wird ebenso viele auch die Sehne BA haben. AM aber wird gleich 86603 dieser Teile, vermindert um einen Bruchteil, sein, d. h. wenn man einen Teil, oder die Einheit, von 86603 hinwegnähme, würde man weniger als die wirkliche Länge erhalten, nämlich weniger als die halbe Seite des dem Kreise eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks.

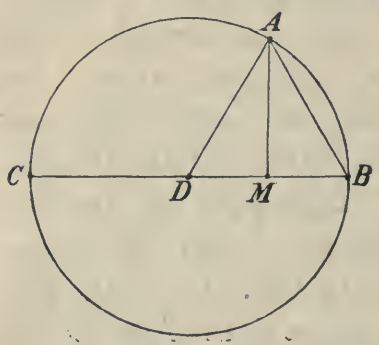

Fig. 21.

Demnach ist der Uberschufs von AB über AM, mit 13397 berechnet, kleiner als der wahre. Fügt man hiervon den dritten Teil, nämlich $4465\frac{2}{3}$, zu AB, nämlich 100000, so erhält man $104465\frac{2}{3}$, was kleiner ist als der Bogen AB. Und dies ist eine erste untere Grenze; wir werden übrigens nachher noch eine andere finden, welche dem wahren Werte näher kommt als diese. Vorher aber soll, auf Grund des vorangegangenen Lehrsatzes, auch eine obere Grenze gesucht werden.

Drei Zahlen sind es, wie erinnerlich, zu welchen die vierte Proportionale gefunden werden soll. Die erste ist gleich der

doppelten Anzahl der Teile von AB, vermehrt um die dreifache derjenigen von AM, wird also mit 459807 kleiner sein als die wahre (es ist nämlich auch das zu beachten, dafs die genannte Zahl wirklich kleiner ist, und entsprechendes gilt für die folgenden Angaben), die zweite ist gleich dem Vierfachen von AB, vermehrt um das einfach genommene AM, wird also mit 486603 gröfser sein als die wahre, und die dritte ist gleich dem dritten Teile des Überschusses von AB über AM und wird also mit 4466 gröfser sein als die wahre. Daher wird die vierte Proportionale mit 4727 gröfser sein als die wahre. Diese zu AB, oder 100000, hinzugefügt, giebt 104727, was mehr ist als die Anzahl der Teile, welche der Bogen AB, der sechste Teil der Peripherie, enthält. Nun haben wir also für die Länge des Bogens AB eine untere und eine obere Grenze gefunden, von welchen die letztere allerdings dem wahren Werte bei weitem näher kommt, denn die in bezug auf den wahren Wert nächst kleinere Zahl ist 104719.

Aber aus diesen beiden kann eine andere untere Grenze abgeleitet werden, eine genauere als die erste, wenn man die folgende Vorschrift benutzt, welche auf einer eingehenderen Untersuchung der Schwerpunkte beruht.

Man addiere vier Drittel des Unterschiedes der gefundenen Grenzen zu der um den dreifachen Sinus vermehrten doppelten Sehne; dasselbe Verhältnis nun, welches die so gebildete Summe zu $3\frac{1}{3}$ oder $\frac{10}{3}$ der Summe aus dem Sinus und der Sehne besitzt, ebendasselbe möge der Überschufs der Sehne über den Sinus zu einer gewissen anderen Gröfse besitzen. Diese letztere, zu dem Sinus hinzugefügt, liefert eine Strecke, welcher kleiner ist als der Bogen*).

Die untere Grenze war $104465\frac{2}{3}$, die obere 104727, ihre Differenz ist $261\frac{1}{3}$. Nun hat man wieder zu drei Zahlen die vierte Proportionale zu finden. Die erste ist gleich der doppelten Anzahl der Teile von AB, vermehrt um die dreifache

*) Siehe Klügel's Mathematisches Wörterbuch, Art. Cyclotechnie pag. 653—654.

derjenigen von AM und um vier Drittel des Unterschiedes der beiden Grenzen, und ist mit 460158 gröfser als die wahre. Die zweite ist $\frac{10}{3}$ der Summe von AB und AM und ist mit 622008 kleiner als die wahre. Die dritte endlich, der Überschufs von AB über AM, ist mit 13397 kleiner als die wahre. Daher ist die vierte Proportionale zu diesen Zahlen mit 18109 kleiner als die wahre. Diese zu der Anzahl der Teile von AM, welche mit $86602\frac{1}{2}$ kleiner ist als die wahre, hinzugefügt, giebt $104711\frac{1}{2}$, was weniger ist als die Anzahl der Teile des Bogens AB. Das Sechsfache hiervon, d. h. 628269 Teile, ist daher kleiner als die ganze Peripherie. Weil aber gefunden worden ist, dafs 104727 Teile gröfser sind als der Bogen AB, so wird das Sechsfache hiervon, d. h. 628362 Teile, gröfser sein als die ganze Peripherie. Daher ist das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser kleiner als 628362, aber gröfser als 628269 zu 200000, oder kleiner als 314181, aber gröfser als 314135 zu 100000. Hieraus geht hervor, dafs es sicher kleiner als $3\frac{1}{7}$ und gröfser als $3\frac{10}{71}$ ist. Ja, es wird sogar hierdurch bereits die irrige Behauptung des Longomontanus*) widerlegt, welcher angegeben hat, dafs der Kreisumfang gröfser sei als 314185 solcher Teile, deren der Durchmesser 100000 enthält.

Es sei nunmehr der Bogen AB ein Achtel des Kreisumfanges; dann wird AM, die Hälfte der Seite des dem Kreise eingeschriebenen Quadrates, 7071068 Teile, weniger einen Bruchteil, enthalten, wenn der Radius DB deren 10000000 enthält. AB aber wird als Seite des eingeschriebenen Achteckes 7653668 Teile und einen Bruchteil enthalten. Aus diesen Angaben findet man, ähnlich wie bei dem vorhergehenden Falle, für die Länge des Bogens AB als erste untere Grenze 7847868, darauf als obere Grenze 7854066 und aus diesen beiden zusammen wiederum als schärfere untere Grenze

*) Longomontanus (der ursprüngliche Name ist Christian Severin) wurde 1562 in Dänemark geboren. Langjähriger Mitarbeiter von Tycho Brahe, erwarb er sich grofse Verdienste um die Astronomie. Er starb 1647 als Professor der Mathematik und Astronomie in Kopenhagen.

7853885. Daraus ergiebt sich, dafs die Kreisperipherie zum Durchmesser ein kleineres Verhältnis hat als $31416\frac{1}{3}$, aber ein gröfseres als 31415 zu 10000.

Da die obere Grenze 7854066 von der wahren Länge des Bogens AB sich um weniger als 85 Teile unterscheidet (es ist nämlich der Bogen AB nach dem, was wir früher gezeigt haben, gröfser als 7853981), 85 Teile aber weniger ausmachen als zwei Sekunden, d. h. als $\frac{2}{1296000}$ der Peripherie, denn diese enthält ja mehr als 60000000 jener Teile, so ist klar, dafs wenn wir die Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks aus den gegebenen Seiten suchen, nach derselben Methode, nach welcher wir soeben jene obere Grenze bestimmt haben, wir niemals einen Fehler von zwei Sekunden begehen werden, selbst wenn die den rechten Winkel einschliefsenden Seiten einander gleich sein sollten, wie sie es hier in dem Dreiecke DAM waren.

Wenn aber das Verhältnis der Seite DM zu MA ein solches ist, dafs der Winkel ADM nicht den vierten Teil eines Rechten übersteigt, so wird der Fehler nicht den sechzigsten Teil einer Sekunde betragen. Setzt man nämlich den Bogen AB gleich $\frac{1}{16}$ der Peripherie, so wird AM, als die Hälfte der Seite des dem Kreise eingeschriebenen gleichseitigen Achtecks, 382683433 Teile, weniger einen Bruchteil, enthalten, AB aber, als Seite des Sechzehneckes, 390180644 Teile und einen Bruchteil, wenn der Radius DB deren 1000000000 enthält. Hieraus findet man für die Länge des Bogens AB als erste untere Grenze 392679714 Teile, als obere Grenze aber 392699148 und aus diesen wiederum als untere 392699010. Nach dem, was wir früher gezeigt haben, steht aber fest, dafs der Bogen AB, als der sechzehnte Teil der Peripherie, gröfser ist als 392699081, welche Zahl von der oberen Grenze um 67 Teile übertroffen wird. Diese aber machen weniger als den sechzigsten Teil einer Sekunde aus, d. h. weniger als $\frac{1}{77760000}$ der ganzen Kreisperipherie, da diese ja entschieden mehr als 6000000000 Teile enthält.

Aus den zuletzt gefundenen Grenzen ergiebt sich über-

dies, dafs das Verhältnis der Kreisperipherie zum Durchmesser kleiner ist als $3141593\frac{1}{5}$, dagegen gröfser als 3141592 zu 1000000.

Wenn jetzt aber der Bogen AB gleich $\frac{1}{60}$ der Peripherie gesetzt wird, d. h. gleich 6 solcher Teile, deren die ganze Peripherie 360 enthält, so wird AM, als die Hälfte der Seite des dem Kreise eingeschriebenen Dreifsigecks, gleich 10452846326766 Teilen, vermindert um einen Bruchteil, sein, wenn der Radius deren 100000000000000 enthält. AB, als Seite des eingeschriebenen Sechzigecks, wird 10467191248588 Teile und einen Bruchteil enthalten. Hieraus findet man für den Bogen AB als erste untere Grenze 10471972889195, als obere 10471975512584 und aus diesen als zweite untere Grenze 10471975511302. Hieraus ergiebt sich, dafs die Kreisperipherie zum Durchmesser ein kleineres Verhältnis hat als 31415926538, dagegen ein gröfseres als 31415926533 zu 10000000000.

Wollte man diese Grenzen durch Addition der Seiten eingeschriebener und umgeschriebener Polygone bestimmen, so müfste man bis zu solchen von fast 400000 Seiten gehen. Denn aus dem eingeschriebenen und umgeschriebenen Sechzigecke läfst sich nichts weiteres erkennen, als dafs das Verhältnis der Peripherie zum Durchmesser kleiner als 3145 zu 1000 ist, dagegen gröfser als 3140. Es ist somit klar, dafs nach unserem Verfahren mehr als die dreifache Anzahl der richtigen Stellen erzielt worden ist. Dafs aber genau dasselbe allemal auch für die folgenden Polygone zutrifft, wird jeder, der es untersuchen will, erkennen; der Grund hierfür ist uns nicht unbekannt, doch würde derselbe einer längeren Auseinandersetzung bedürfen.

Wie man aber ferner durch die hier entwickelten Methoden, unter Annahme irgend welcher anderer eingeschriebener Linien, die Länge der Bogen, durch welche jene gespannt werden, finden kann, dürfte nach meiner Meinung nunmehr hinreichend klar sein. Sind dieselben gröfser als die Seite des eingeschriebenen Quadrates, so hat man die Länge des von dem Halbkreise übrig gebliebenen Bogens zu bestimmen, dessen Sehne

dann ebenfalls gegeben ist. Namentlich aber mufs man wissen, wie man die Sehnen der halben Bogen findet, wenn die Sehne des ganzen Bogens gegeben ist. Auf diese Weise werden wir, wenn wir Zweiteilungen anwenden wollen, für jede Sehne die Länge des zugehörigen Bogens mit beliebiger Genauigkeit leicht ermitteln können. Dies ist nützlich zur Prüfung der Sinustafeln. Aber auch zur Zusammenstellung derselben: denn wenn die Sehne irgend eines Bogens bekannt ist, so kann man auch mit hinreichender Genauigkeit die Sehne eines Bogens bestimmen, der nur um weniges gröfser oder kleiner ist.

IV.

JOHANN HEINRICH LAMBERT.

(1728—1777.)

VORLÄUFIGE KENNTNISSE

FÜR DIE, SO DIE QUADRATUR
UND RECTIFICATION DES CIRCULS SUCHEN.

---

§ 1.

Ich kann mit einigem Grunde zweifeln, ob gegenwärtige Abhandlung von denjenigen werde gelesen, oder auch verstanden werden, die den meisten Antheil daran nehmen solten, ich meyne von denen, die Zeit und Mühe aufwenden, die Quadratur des Circuls zu suchen. Es wird sicher genug immer solche geben, und solte man die, so in den folgenden Zeiten sich damit beschäftigen, nach denen beurtheilen, die sich bisher damit beschäftigt haben, so werden es gröstentheils solche seyn, die von der Geometrie wenig verstehen, und ihre Kräfte zu schätzen nicht im Stande sind. Was aber den meisten an Erkenntnifs und Verstand abgeht, und wo sie mit richtigen uud zusammenhängenden Schlüssen nicht ausreichen, das ersetzt die Ruhm- und Geldbegierde durch Sophismata, die öfters auch weder sehr fein, noch sehr versteckt sind. Es hat auch Fälle gegeben, wo solche Leute feste geglaubt haben, man versage ihren vermeyntlichen Beweisen den Beyfall blofs aus Neid und Mifsgunst. Es geht auch unter ihnen eine Sage herum, als wenn in England und Holland eben so grofse Preifse und Belohnungen wären auf die Quadratur des Circuls gesetzt worden, als auf die Erfindung der geographischen Länge zur See. Ich will zwar eben nicht gut dafür stehen, ob man nicht zu Anfange des vorigen Jahrhunderts, oder noch vorher, geglaubt hat, dafs die Erfindung der Länge zur See mit der Quadratur des Circuls in einer solchen Verbindung stehe, dafs, wer letztere gefunden, zugleich auch erstere gefunden habe. So viel ist gewifs, dafs man damals Verhältnisse zwischen Wahrheiten suchte und glaubte, die noch viel weniger zusammen pafsten. Solte aber in der That wegen der Länge zur See ein Preifs auf die Quadratur des Circuls gesetzt worden seyn, so glaube ich, dafs das Parlement in England ein sehr gutes Werk thun würde, wenn es, zumal da nun die Preifse für die Länge zur See schon ausgetheilt worden, in allen Zeitungen

kund machen liesse, dafs man sich bey der Quadratur des Circuls auf keinen Preifs Rechnung zu machen habe. In der That hat man sich auch keine Rechnung darauf zu machen, weil man heutiges Tages viel zu wohl weifs, wie sehr die Länge zur See von der Quadratur des Circuls unabhängig ist.

§ 2.

Die Erfindung von Sachen, die lange vergebens gesucht worden, ist entweder an sich unmöglich, oder sie ist einem künftigen glücklichen Zufall vorbehalten. Ein Beyspiel mag dieses erläutern. Es ist nicht zu zweifeln, dafs die alten Phoenicischen, und nach ihnen die Griechischen und Römischen Schiffer ein Mittel gewünscht haben, welches ihnen bey trübem Wetter eben so den Weg des Schiffes zeigte, als ihn bey hellem Wetter die Gestirne zeigten. Wie hätte ihnen in Sinn kommen sollen, dafs sie dieses Mittel in dem Magnetsteine zu suchen hätten? Es ist unstreitig, dafs diese Entdeckung auf einen schlechthin unvorhergesehenen Zusammenlauf mehrerer Umstände ankäme, den man, ohne ihn vorher zu wissen, nicht veranstalten konnte, uud der folglich sich von selbst darbieten muste. Auf eine ähnliche Art ist es zu vermuthen, dafs, wenn je die Quadratur des Circuls möglich seyn solte, sie vielleicht einem Mefskünstler aufstöfst, der an nichts wenigers als an die Erfindung derselben gedenkt. Es ist aber auch möglich, dafs man auf eine eben so zufällige Weise auf irrige Quadraturen verfalle. Hievon geben die Zahlen 1225 und 961 ein artiges Beyspiel. Sie haben eine gedoppelte Eigenschaft. Denn einmal sind es die Quadratzahlen von 35 und 31. Sodann verhalten sie sich beynahe wie das Quadrat des Diameters zum Inhalt des Circuls. Dadurch erhält man auch, dafs der Diameter des Circuls zu der Seite eines mit dem Circul gleich räumigen Quadrates beynahe wie 35 zu 31 ist. Sodann, wenn man 961 vierfach nimmt, so erhält man 3844 ebenfalls eine Quadratzahl, und der Diameter wird sich zum Umkreise beynahe wie 1225 zu 3844 verhalten. Nur mufs man dieses beynahe nicht sehr strenge nehmen. Denn theilt man 3844 durch 1225, so kömmt 3,138... Und da sieht man leicht, dafs

diese Verhältnifs schon in der 3ten Decimalstelle von 3,1415926.. abweicht, und daher lange nicht so genau ist, als die Archimedischen 22 : 7, welche die Reihe 3,1428571.. giebt, die nur um 0,0012645.. zu grofs, und damit fast dreymal genauer ist.

§ 3.

Indessen behalten die Zahlen 1225 und 961, oder 1225 und 3844 dennoch dadurch einen gewissen Werth, dafs es Quadratzahlen sind. In diesem Jahrhundert sind, so viel ich weifs, ihrer drey darauf verfallen. Dieser Umstand scheint mir der merkwürdigste. Denn da es noch mehrere solcher Quadratzahlen giebt, so solte man ehender denken, dafs jeder von diesen drey Erfindern auf andere Zahlen würde verfallen seyn. Der erste war Herr von Leistner, Kayserl. Rittmeister. Er fand die Zahlen 1225 und 3844, und diese wurden von einer Kayserl. Hofcommission als unrichtig erkannt, wowider aber in einer Anno 1740 herausgekommenen Schrift, Nodus gordius etc. protestirt wurde. Der andere war Herr Merkel, Prediger zu Ravensburg in Schwaben*). Seine Schrift kam erst Anno 1751 heraus. Er sagt aber, dafs er lange vor dem Herrn von Leistner seine Zahlen 1225 und 961 zufälliger Weise gefunden habe, er sey aber erst durch den Nodum gordium bewogen worden, sie auf alle Proben zu setzen; was ihn aber fürnehmlich aufgebracht habe, sie durch den Druck bekannt zu machen, sey ein Articul in der Utrechter Zeitung gewesen, wo eine Quadratur angekündet, und der vermeyntlich darauf gesetzte Preifs angefordert wurde; diese Nachricht habe ihm um so geschwinder die Feder in die Hand gegeben, weil er den vorhergehenden Winter seine Zahlen einem Franzosen, der wirklich nachher in die Niederlande verreisete, vorgerechnet, und auf das Papier nicht weiter Achtung gegeben, und so habe er starke Gründe zu vermuthen, dieser Geometra möchte mit seinem Kalbe gepflügt haben etc. Was damit nun weiter vorgegangen, ist mir nicht bekannt. Es wurde aber die Merkel'sche Schrift Anno 1765 von Herrn Prof. Bischoff zu Alten-Stettin

*) Auf ihn bezieht sich Lessing's bekanntes Spottgedicht: „Der mathematsche Theolog, der sich und andre nie betrog, etc.“

mit Anmerkungen und noch mehreren Prüfungen wiederum aufgelegt, und die Zahlen 1225 und 961 als richtig erklärt. Bald darauf kamen sie im Anfange des 1766sten Jahres in den Zeitungen wiederum zum Vorschein, mit der solennen Ankündigung, dafs man fernerhin die Quadratur des Circuls nicht mehr zu suchen nöthig habe, weil sie bereits, und zwar zum drittenmale gefunden etc. Es wäre eben nicht übel gethan, wenn viele, die noch künftighin sich an die Sache machen werden, dieses ganz feste glaubten, weil sie dadurch überhoben wären, Mühe, Zeit und Kräfte zu verlieren, die man als sehr vergebens angewandt ansehen kann, weil die meisten von denselben kaum eine leichte geometrische Aufgabe zu erfinden und aufzulösen im Stande sind. Es ist auch kaum zu zweifeln, dafs nicht auch künftig noch die Merkelsche und Leistnersche Zahlen wieder aufgewärmt zum Vorschein kommen solten. Die Hauptprobe von ihrer Unrichtigkeit ist, dafs 3844 durch 1225 getheilt, die Ludolphische Zahlen geben solte. Herr Prof. Bischoff nimmt auch diese Ludolphische, und sogar die über doppelt weiter reichende Sherwinsche Zahlen vor, er sieht sie aber nicht als Probiersteine an, sondern sagt, dafs sie zwar gar sehr nahe zutreffen, dabey aber den Inhalt des Circuls nicht völlig genau geben, demnach müste man auf andere Proben bedacht seyn. Von solchen Proben führt Herr Bischoff 8 an, und macht auf diese Art die Sache scheinbar. Es ist unstreitig, dafs wenn 3844 durch 1225 getheilt, die bis auf 32 Decimalstellen reichende Ludolphische Zahlen genau geben würde, man damit eines Theils sehr wohl zufrieden seyn könnte, andern Theils aber sehen müste, ob man durch diese Division auch die bis auf 72 Decimalstellen reichende Sherwinsche Zahlen, und sodann die bis auf 100 Decimalstellen reichende Machinsche, oder endlich die bis auf 127 Decimalstellen reichende Lagnysche Zahlen heraus bringen würde. Man könnte sodann um so mehr noch mit der Proportion 3844 : 1225 zufrieden seyn. Allein nimmt man bemeldte Division vor, so fängt der Quotient 3,138 . . . schon in der 3ten Decimalstelle an, von den Ludolphischen Zahlen abzuweichen. Und überdies sind alle die 8 Proben von der Art, dafs jede beliebige zwo Quadratzahlen dieselbe aushalten. Ich werde

mich aber nicht verweilen, dieses hier zu zeigen, sondern vielmehr angeben, wie sich nach einer allgemeinen Regel solche Quadratzahlen finden lassen, welche die Verhältnifs des Quadrats des Diameters zum Inhalte des Circuls desto genauer angeben, je grösser sie sind. Dieses mag unter andern auch dahin dienen, dafs man künftig nicht nöthig habe, erst zufälliger Weise auf solche Quadratzahlen zu verfallen, und sie als ganz richtige Quadraturen des Circuls anzugeben.

§ 4.

Man nehme zwo Quadratzahlen aa, bb, so, dafs wenn a der Diameter des Circuls, demnach aa dessen Quadrat ist, sodann bb den Inhalt eines mit dem Circul gleichräumigten Quadrates, und daher b die Seite desselben vorstelle. Auf diese Art wird sich aa zu $4bb$ wie der Diameter zum Umkreise, oder wie 1 zu 3, 141592, 653589, 793238, 462643, 383279, 502884, 197169, 399375, 105820, 974944, 592307, 816406, 286208, 998628, 034825, 342117, 067982, 148086, 513272, 306647, 093844, $6 + \cdots = 1 : \pi$ verhalten*). Demnach ist $aa : 4bb = 1 : \pi$ und hieraus folgt

$$a : b = 2 : \sqrt{\pi}.$$

Es ist aber $\sqrt{\pi} = 1{,}77245385075\ldots$

Und hieraus findet sich

$$a : b = \frac{2{,}00000000000}{1{,}77245385075} = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{26} + \text{etc.}$$

Dieses giebt der Ordnung nach

$$\begin{aligned} b : a &= 7 : 8 + \cdots \\ &= 8 : 9 - \cdots \\ &= 31 : 35 + \cdots \\ &= 39 : 44 - \cdots \\ &= 109 : 123 + \cdots \\ &= 148 : 167 - \cdots \\ &= 3848 : 4343 + \cdots \text{ etc.} \end{aligned}$$

*) Die von Lambert hier mitgeteilten 127 Dezimalstellen sind zuerst von Lagny berechnet worden. Dafs die 113. Dezimalstelle nicht 7 sondern 8 heifsen mufs, ist von Vega bemerkt worden. Vergl. pag. 45.

und

$$\begin{aligned} bb:aa &= 49:64 + \cdots \\ &= 64:81 - \cdots \\ &= 961:1225 + \cdots \\ &= 1521:1936 - \cdots \\ &= 11881:15129 + \cdots \\ &= 21904:27889 - \cdots \\ &= 14807104:18852964 + \cdots \text{ etc.} \end{aligned}$$

Diese Brüche sind nun der Ordnung nach genauer. Man sieht auch hieraus, dafs die Herren von Leistner, Merkel, Bischoff etc. nur zufälliger Weise auf ihre Zahlen 961, 1225 verfallen sind. Denn die Rechnung mit 49 : 64 oder 64 : 81 wäre immer viel leichter und kürzer gewesen, und mit 1521 : 1936 oder 11881 : 15129 etc. würde sie zwar weitläuftiger, dabey aber genauer gewesen seyn.

§ 5.

Es ist aber überhaupt mehr anzurathen, schlechthin nur die ersten von diesen Verhältnissen nemlich $b:a$ zu gebrauchen. Denn für $bb:aa$ hat man andere Brüche, die, ohne eben Quadratzahlen zu seyn, viel kleiner und viel genauer sind, indem man nach eben dieser Art zu verfahren

$$\begin{aligned} bb:aa = \pi:4 &= 11:14 \\ &= 172:219 \\ &= 355:452 \text{ etc.} \end{aligned}$$

findet. Es drücken aber die Brüche $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{31}{35}$, $\frac{39}{44}$, $\frac{109}{123}$, $\frac{148}{167}$, $\frac{3848}{4342}$ etc. die Seite eines Quadrates aus, welches so grofs als die Fläche eines Circuls ist, dessen Diameter $= 1$ angenommen wird. Und hinwiederum stellen eben diese Brüche umgekehrt, oder $\frac{8}{7}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{35}{31}$, $\frac{44}{39}$, $\frac{123}{109}$, $\frac{167}{148}$, $\frac{4342}{3848}$ etc. den Diameter eines Circuls vor, dessen Inhalt $= 1$ ist. Und in dieser Absicht lassen sie sich bey Ausmessung von Cylindern, und bey Verfertigung der cylindrischen Visirstäbe gebrauchen. Besonders ist hiezu der Bruch $\frac{167}{148}$ dienlich, weil derselbe unter

den kleineren der genaueste ist, und erst in der 7ten Decimalstelle anfängt von dem wahren abzuweichen. Denn rechnet man nach, so findet sich der Diameter des Circuls, dessen Inhalt = 1 ist, vermittelst der Ludolphischen Zahlen

$$= 1{,}1283790\ldots$$

Es ist aber $\frac{167}{148} = 1{,}1283784\ldots$

demnach der Unterschied $= 0{,}0000006\ldots$

Es geschieht selten, dafs man diesen Diameter in practischen Fällen genauer zu wissen verlangt.

§ 6.

Da es, wenn man den Diameter einer Kugel mit der Seite eines gleichräumigten Würfels vergleicht, ebenfalls möglich ist, auf solche Cubiczahlen zu verfallen, woraus man die Quadratur des Circuls oder die Cubatur der Sphären erträumen könnte; so wird es eben nicht undienlich seyn, solchen künftigen Vorfällen vorzubeugen, und solche Cubiczahlen nach eben der Methode voraus zu bestimmen, zumal da sie bey Berechnung des räumlichen Inhalts der Kugeln, und bey Verfertigung der Caliberstäben mit Vortheil gebraucht werden können. Es sey demnach der Diameter der Kugel $= a$, die Seite des gleichräumigten Würfels $= b$, die Ludolphische Zahlen $3{,}1415926\cdots = \pi$, so ist nach der bekannten Archimedischen Regel

$$b^3 : a^3 = \pi : 6$$

demnach

$$b : a = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}.$$

Nun ist

$$\pi = 3,\ 141592,\ 653589,\ 793238,\ 462\ldots$$

$$\frac{1}{6}\pi = 0,\ 523598,\ 775598,\ 298873,\ 077\ldots$$

Und hieraus die Cubicwurzel

$$b : a = 0,\ 805995,\ 977008,\ 234820\ldots$$

welche in einen immer fortgehenden Bruch aufgelöst

$$b : a = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \text{etc.}$$

giebt. Hieraus erhält man

$$\begin{aligned} b : a = &\quad 4 : 5 + \\ = &\quad 25 : 31 - \\ = &\quad 54 : 67 + \\ = &\quad 457 : 567 - \\ = &\quad 2796 : 3469 + \\ = &\quad 17233 : 21381 - \text{ etc.} \end{aligned}$$

Demnach, wenn der Diameter einer Kugel $= 1$ ist, so wird die Seite eines gleichräumigten Würfels durch jeden der Brüche $\frac{4}{5}, \frac{25}{31}, \frac{54}{67}, \frac{457}{567}, \frac{2796}{3469}, \frac{17233}{21381}$ etc. desto genauer ausgedrückt, je grösser derselbe ist. Cubirt man diese Brüche, so geben sie den Inhalt der Kugel. Setzt man aber den körperlichen Inhalt der Kugel $= 1$, so stellen eben diese Brüche umgekehrt $\frac{5}{4}, \frac{31}{25}, \frac{67}{54}, \frac{567}{457}, \frac{3469}{2796}, \frac{21381}{17233}$ etc. den Diameter der Kugel vor. Man kann sich mehrentheils mit dem Bruche $\frac{567}{457}$ begnügen, weil derselbe, wenn man nachrechnet, den Diameter der Kugel eben so genau giebt, als man denselben vermittelst der logarithmischen Tabellen findet.

§ 7.

Ich habe bey dieser Rechnung die Cubicwurzel von $\frac{1}{6}\pi$ bis auf die 18te Decimalstelle geliefert. Da es nun eine verdrüfsige und ungemein langwierige Arbeit wäre, wenn man sie nach den gemeinen Regeln bis so weit suchen wolte, so wird es nicht undienlich seyn, wenn ich noch beyfüge, wie ich diese Wurzel vermittelst einer einigen Regel de tri gefunden, und zugleich, wie ich mich versichert habe, dafs sie bis auf die 18te Decimalstelle richtig ist.

§ 8.

Nach der Newtonschen Binomialformel ist überhaupt

$$x = (a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + n\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + \text{etc.}$$

Man multiplicire nun diese Reihe mit $1 + \frac{zb}{a}$, und in dem Producte

$$\begin{aligned} x\left(1 + \frac{zb}{a}\right) = a^n &+ na^{n-1}b + n\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 \\ &+ n\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 + \text{etc.} \\ &+ za^{n-1}b + nza^{n-2}b^2 \\ &+ n\frac{n-1}{2}za^{n-3}b^3 + \text{etc.} \end{aligned}$$

setze man, um z zu bestimmen, das dritte Glied

$$n\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + nza^{n-2}b^2 = 0$$

so ist

$$z = -\frac{n-1}{2}$$

Wird nun dieser Werth von z in dem Producte gesetzt, so erhält man

$$x\left(1 - \frac{n-1}{2}\frac{b}{a}\right) = a^n + \frac{n+1}{2}a^{n-1}b - n\frac{n-1}{2}\frac{n+1}{6}a^{n-3}b^3 - \text{etc.}$$

und hieraus

$$x = (a + b)^n = \frac{2a + (n+1)b}{2a - (n-1)b}a^n - \frac{n(n-1)(n+1)a^{n-2}b^3}{6(2a - (n-1)b)} - \text{etc.}$$

Von dieser Reihe wird das erste Glied zur Bestimmung der Wurzel gebraucht, das zweyte aber dient, um zu finden, wie weit man mit dem ersten ausreicht.

§ 9*).

Nun ist für die Cubicwurzel $n = \frac{1}{3}$. Setzt man diesen Werth, so erhält man nach den behörigen Reductionen die Formel

*) Im Original tragen die Paragraphen von hier an eine um 1 zu niedrige Nummer.

$$x = \sqrt[3]{a+b} = \frac{3a+2b}{3a+b}\sqrt[3]{a} + \frac{2b^3\sqrt[3]{a}}{81a^3+27a^2b} + \text{etc.}$$

Diese habe ich nun, um aus

$$a+b = \frac{1}{6}\pi = 0{,}523598{,}775598{,}298873{,}077\ldots$$

die Cubicwurzel zu ziehen, folgendermassen angewandt. Erstlich fand ich, vermittelst der Logarithmen die sechs ersten Decimalstellen dieser Wurzel. Diese sind

$$0{,}805995 = \sqrt[3]{a}$$

Und da $805995 = 806000 - 5$ ist, so liesse sich hievon der Cubus leicht finden. Ich setzte demnach denselben

$$0{,}523596871520449875 = a$$

und dadurch erhielt ich

$$b = 0{,}000001904077848998077107\ldots$$

Da nun, wenn man das erste Glied der Reihe

$$x = \sqrt[3]{a+b} = \frac{3a+2b}{3a+b}\sqrt[3]{a}$$

allein beybehält, dieses die Regel de tri giebt

$$(3a+b):(3a+2b) = \sqrt[3]{a}:x$$

oder

$$\left(a+\tfrac{1}{3}b\right):\left(a+\tfrac{2}{3}b\right) = \sqrt[3]{a}:x,$$

so durfte ich nur die Werthe von a und b setzen, um den Werth

$$x = \sqrt[3]{a+b} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} = 0{,}805995977008234820\ldots$$

zu erhalten. Dafs nun aber dieser Werth bis auf die 18te Decimalstelle richtig seye, fand ich vermittelst des zweyten Gliedes der Reihe

$$\frac{2b^3\sqrt[3]{a}}{81a^3+27a^2b}$$

durch einen leichten Überschlag. Denn da b um 275000 mal kleiner ist als a, so konnte ich dieses Glied

$$\frac{2b^3}{81a^3}\sqrt[3]{a}$$

setzen. Nun ist

$$3 \log \frac{b}{a} = 0{,}6820631 - 17$$

$$\log \frac{2}{81} = \underline{0{,}3925450 - 2}$$

demnach

$$\log \frac{2b^3}{81a^3} = 0{,}0746081 - 18.$$

Ferner ist

$$\frac{1}{3} \log a = \underline{0{,}9063323 - 1}$$

folglich

$$\frac{2b^3}{81a^3} \sqrt[3]{a} = 0{,}9809404 - 19.$$

Da nun die Characteristica $= -19$ ist, so ist klar, dafs

$$\frac{2b^3}{81a^3} \sqrt[3]{a}$$

einen Decimalbruch vorstellt, der erst auf der 19ten Decimalstelle anfängt. Und so ist die durch

$$x = \frac{3a + 2b}{3a + b} \sqrt[3]{a}$$

gefundene Decimalreihe bis auf die achtzehnte Stelle genau*).

§ 10.

Ob die Verhältnifs des Diameters zum Umkreise durch einen rationalen Bruch ausgedrückt werden könne, ist, meines Wissens, noch nicht erörtert. Sturm**) hat zwar diese Frage

*) Die numerische Berechnung von $\log \frac{2b^3}{81a^3}$ enthält im Originale (und zwar nicht nur im Texte, sondern auch in der in der Vorrede mitgeteilten angeblichen Berichtigung) einige Fehler, die ich mit gleichzeitiger unwesentlicher Modifikation des Textes hier verbessert habe. Die Schlüsse werden dadurch nicht berührt.

**) Gemeint ist Johann Christoph Sturm (geb. 1635, Pfarrer zu Deiningen, später Professor der Mathematik und Physik an der Universität Altdorf, wo er 1703 starb). Er hat sich namentlich durch vortreffliche, auch heute noch recht beachtenswerte, mathematische und astronomische Lehrbücher bekannt gemacht. Die von Lambert erwähnte Untersuchung befindet sich in dem sehr interessanten Kompendium „Joh. Chr. Sturmii Mathesis enucleata“ (Norimbergae 1689), wo pag. 181 in Prop. XLIII (wohl zum ersten Male in dieser präzisen Form) der Satz ausgesprochen ist: „Area circuli est quadrato diametri incommensurabilis“. Sturm war, was uns hier ebenfalls interessiert, auch der erste, der die Schriften des

zu verneinen gesucht: allein sein Beweis ist mangelhaft, weil es allerdings unendliche Reihen giebt, deren Summa rational ist, ungeachtet alle Glieder irrational sind. Da demnach die Sache noch zu erörtern bleibt, so kann es immer noch Leute geben, die mit Aufsuchung solcher rationalen Brüche ihre Zeit verlieren, oder durch irrige Schlüsse dergleichen auf die Bahn bringen. Nun ist zwar bey jedem, vermittelst der Ludolphischen Zahlen, die Probe bald gemacht. Allein, wenn auch der fürgegebene Bruch dadurch verworfen wird, so kann noch immer die Lust bleiben, andere zu suchen. Nun läfst sich diese Lust so geringe machen, dafs man das Aufsuchen solcher Brüche leicht wird bleiben lassen. Denn wenn auch die Verhältnifs des Diameters zum Umkreise sich genau durch einen rationalen Bruch ausdrücken liesse, so kann man aus den oben (§ 4) angeführten Lagnyschen Zahlen, oder auch aus den Ludolphschen Zahlen erweisen, dafs es ein sehr grosser Bruch seyn müsse. Diese Zahlen lassen sich nemlich in Brüche verwandeln, welche der Ordnung nach grösser und zugleich auch genauer werden. Die Methode und die dabey zu gebrauchende Vorsichtigkeit habe ich in der Abhandlung*) von Verwandlung der Brüche § 17 angezeigt und durch Beyspiele erläutert. Nach dieser Methode fand ich für das Verhältnifs des Diameters zum Umkreis folgende rationale Brüche oder Verhältnisse

$$1 : 3$$
$$7 : 22$$
$$106 : 333$$
$$113 : 355$$

Archimedes in das Deutsche übertrug. Im Jahre 1667 veröffentlichte er „Des unvergleichlichen Archimedis Sandrechnung“ und im Jahre 1670 „Des unvergleichlichen Archimedis Kunstbücher“. Beide Übersetzungen erschienen in Nürnberg. In der zweiten befindet sich die Kreismessung des Archimedes. Siehe das pag. 28 citierte Werk von J. G. Doppelmayr (pag. 114—122).

*) Die Abhandlung, auf welche sich Lambert hier und in den folgenden Paragraphen beruft, befindet sich in dem gleichen Bande II. (pag. 54—132) seiner „Beyträge“, in welchem sich auch die Abhandlung „Vorläufige Kenntnisse etc.“ befindet. Sie handelt von der Verwandlung der Brüche in Kettenbrüche.

33102 : 103993
33215 : 104348
66317 : 208341
99532 : 312689
265381 : 833719
364913 : 1146408
1360120 : 4272943
1725033 : 5419351
25510582 : 80143857
52746197 : 165707065
78256779 : 245850922
131002976 : 411557987
340262731 : 1068966896
811528438 : 2549491779
1963319607 : 6167950454
4738167652 : 14885392687
6701487259 : 21053343141
567663097408 : 1783366216531
1142027682075 : 3587785776203
1709690779483 : 5371151992734
2851718461558 : 8958937768937
107223273857129 : 336851849443403
324521540032945 : 1019514486099146 etc.

Von diesen Verhältnissen ist nun jede folgende genauer als die vorhergehende, und zwischen dieselben fällt keine rationale Verhältnifs, die genauer wäre, als die nächst grössere unter den hier angegebenen. Demnach wenn auch die Verhältnifs des Diameters zum Umkreise durch ganze Zahlen genau solte ausgedrückt werden können, so müsten diese Zahlen nothwendig grösser als die letzten

324521540032945 : 1019514486099146

von den hier angegebenen seyn. Diese zwo Zahlen geben die Ludolphische bis auf die 25te Decimalstelle. Wenn sie aber auch ganz genau wären, so sieht man leicht, dafs es weitläuftig und beschwerlich wäre damit zu rechnen. Übrigens entstehen alle diese Verhältnisse aus der Fractio continua

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\frac{1}{1}+\frac{1}{292}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{14}+\frac{1}{2}+$$

wobey

$$a=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{84}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{37}+\frac{1}{3}+\text{etc}$$

ist. Weiter habe ich die Berechnung von dieser Fractio continua aus den Ludolphischen Zahlen nicht verfolgt. Und so werde ich auch nicht sagen, ob sie, wenn weiter fortgerechnet wird, irgend abgebrochen werde. Wäres dieses, so liesse sich die Verhältnifs des Diameters zum Umkreise durch ganze, wiewohl ungeheuer grosse Zahlen ausdrücken. Ich habe aber in vorbemeldter Abhandlung von Verwandlung der Brüche (§ 23) eine andere Fractio continua angegeben, welche nach einem gewissen Gesetze ins Unendliche fortgeht, und die Hoffnung, die Verhältnifs des Diameters zum Umkreise durch ganze Zahlen zu bestimmen, ganz benimmt.

§ 11.

Es giebt in der Mathematik noch andere Grössen, von denen es sich eben so viel der Mühe lohnte, zu suchen, ob sie durch rationale Brüche, oder auf eine geschmeidigere Art ausgedrückt werden können, als es noch dermalen durch Decimalzahlen geschieht. Dahin kann besonders die Zahl

2,718281,828459,045235,36028 . . .

gerechnet werden, deren hyperbolischer Logarithmus = 1 ist. Diese Zahl ist in Absicht auf die Logarithmen eben das, was die Ludolphischen Zahlen in Absicht auf den Circul sind,

und daher in Absicht auf trigonometrische und andere Rechnungen von gleicher Erheblichkeit. Fragt man demnach, warum denn nur die Ludolphische Zahlen so viel Wesens machen? so wird diese Frage theils nur aus der Geschichte der Mathematik, und theils auch dadurch beantwortet werden können, dafs die Begriffe Circul, Vierecke, Grösse, gleich jedermann bekannt sind, welches sich von dem Begrif hyperbolische Logarithmen nicht sagen läfst, weil dieser Begrif erst durch den Infinitesimalcalcul bekannt worden, und ohne die Erlernung dieses Calculs nicht wohl deutlich gemacht werden kann. Wäre den meisten unter denen, so die Quadratur des Circuls suchen, nicht dieser Riegel geschoben, so würden, allem Ansehen nach, eben so viel vergebliche Bemühungen und fehlgeschlagene Versuche, in Ansehung der Zahl

2,718281,828459,045235,36028 . . .

zum Vorschein kommen, als in Ansehung der Ludolphischen Zahlen zum Vorschein gekommen sind. Es läfst sich aber auch diese Zahl nicht durch einen rationalen Bruch genau ausdrücken. Denn setzt man dieselbe Kürze halber $= e$, so ist

$$e = 1 + \frac{2}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \frac{1}{18} + \frac{1}{22} + \frac{1}{26} + \text{etc.}$$

oder

$$\frac{e-1}{e+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \frac{1}{18} + \text{etc.}$$

oder

$$\frac{ee-1}{ee+1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \text{etc.}$$

und überhaupt

$$\frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{1}{\frac{2}{x}} + \frac{1}{\frac{6}{x}} + \frac{1}{\frac{10}{x}} + \frac{1}{\frac{14}{x}} + \text{etc.}$$

Da diese Brüche immer fortgehen, so läfst sich auch weder e noch e^x durch einen rationalen Bruch genau ausdrücken, wenn nemlich x eine rationale Zahl oder Bruch ist. Ich habe übrigens diese Formeln nach der Methode gefunden, die ich in vorbemeldter Abhandlung von Verwandlung der Brüche (§ 19 seqq.) angegeben habe. Die Veranlassung aber, diese Formeln zu suchen, gab mir des Herrn Eulers Analysis infinitorum, wo der Ausdruck

$$\frac{e-1}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \frac{1}{18} + \text{etc.}$$

in Zahlen berechnet, in Form eines Beyspieles vorkömmt.

§ 12.

Auf eben diese Veranlassung gienge ich weiter, und fande in Absicht auf die Circulbögen den Ausdruck

$$\text{tang } v = \cfrac{1}{\frac{1}{v} - \cfrac{1}{\frac{3}{v} - \cfrac{1}{\frac{5}{v} - \cfrac{1}{\frac{7}{v} - \cfrac{1}{\frac{9}{v} - \text{etc.}}}}}}$$

Aus diesem immer fortgehenden Bruche lassen sich, in Absicht auf die unbestimmte Quadratur des Circuls, verschiedene Folgen ziehen. Man setze n eine ganze Zahl, und mache $v = 1 : n$, so ist

$$\text{tang } v = \frac{1}{n} - \cfrac{1}{3n - \cfrac{1}{5n - \cfrac{1}{7n - \cfrac{1}{9n - \cfrac{1}{11n - \text{etc.}}}}}}$$

Da dieser Bruch immer fortgeht, so folgt daraus, dafs, so oft ein Circulbogen eine Pars aliquota des Halbmessers ist, die Tangente desselben nothwendig irrational sey. Denn wäre die Tangente rational, so könnte dieser Bruch nicht in einem fortgehen, sondern er müste irgend aufhören. Um dieses

mehr zu erläutern, wollen wir zum Beyspiele $v = 1$ setzen. Da nun auch $n = 1$ wird, so ist

$$\text{tang arc } 1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \text{etc.}$$

demnach zufolge der vorhin (§ 10) angeführten Abhandlung*)

	+ 1	+ 0
+ 1	+ 0	+ 1
− 3	+ 1	+ 1
+ 5	− 3	− 2
− 7	− 14	− 9
+ 9	+ 95	+ 61
− 11	+ 841	+ 540
+ 13	− 9156	− 5879
etc.	etc.	etc.

Und so wird die Tangente des dem Halbmesser gleichen Bogens, der Ordnung nach, durch die Brüche

$$\frac{3}{2}, \frac{14}{9}, \frac{95}{61}, \frac{841}{540}, \frac{9156}{5879} \text{ etc.}$$

und zwar durch jeden folgenden dergestalt genauer ausgedrückt, dafs jeder kleinere Bruch minder genau ist. Da nun diese Reihe von Brüchen nirgends abgebrochen wird, sondern dergestalt fortgeht, dafs endlich Nenner und Zähler, ohne gemeinsame Theiler zu haben, grösser werden, als jede fürgegebene Zahl, so läfst sich die Tangente des dem Halbmesser gleichen Bogens durch keinen endlichen oder rationalen Bruch ausdrücken. Eben dieses gilt auch für die Tangenten jeder Bögen, die $\frac{1}{n}$ Theil des Halbmessers sind.

*) Die folgende kleine Tabelle ist nach der bekannten Vorschrift konstruiert, nach welcher man die Zähler (die Zahlen der zweiten Vertikalreihe) und die Nenner (die Zahlen der dritten Vertikalreihe) der Näherungsbrüche eines Kettenbruches bildet.

§ 13.

Werden die erstgefundene Brüche von einander abgezogen, so findet sichs dadurch, wie geschwinde sie dem wahren Werthe näher kommen. Denn so ist

$$\frac{14}{9} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2 \cdot 9}$$

$$\frac{95}{61} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 61}$$

$$\frac{841}{540} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 61} + \frac{1}{61 \cdot 540}$$

$$\frac{9156}{5879} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 61} + \frac{1}{61 \cdot 540} + \frac{1}{540 \cdot 5879}$$

Fährt man auf diese Art fort, so wird die Tangente des dem Halbmesser gleichen Bogens durch eine unendliche Reihe

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 61} + \frac{1}{61 \cdot 540} + \frac{1}{540 \cdot 5879} + \frac{1}{5879 \cdot 76887} + \text{etc.}$$

ausgedrückt, welche stärker convergirt als jede geometrische Reihe, und man weifs, dafs die Summe derselben irrational ist.

§ 14.

Dafs aber nicht nur die Tangenten der Bögen $\frac{1}{n}$, sondern überhaupt jeder Bögen $\frac{m}{n}$, die zum Halbmesser ein rationales Verhältnifs haben, irrational seyn, erhellet auf eben diese Art. Es sey z. E. $v = \frac{2}{3}$, so ist die Tangente dieses Bogens

$$= \cfrac{1}{\frac{3}{2} - \cfrac{1}{\frac{9}{2} - \cfrac{1}{\frac{15}{2} - \cfrac{1}{\frac{21}{2} - \text{etc.}}}}}$$

demnach

	1	0	
$+\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{0}{1}$
$-\frac{9}{2}$	$+1$	$+\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$
$+\frac{15}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{23}{4}$	$\frac{18}{23}$
$-\frac{21}{2}$	$-\frac{131}{4}$	$-\frac{333}{8}$	$\frac{262}{333}$
$+\frac{27}{2}$	$+\frac{2715}{8}$	$+\frac{6901}{16}$	$\frac{5430}{6901}$
etc.	etc.	etc.	etc.

Und so wird die Tangente des Bogens $v = \frac{2}{3}$ durch jeden der Brüche $\frac{2}{3}, \frac{18}{23}, \frac{262}{333}, \frac{5430}{6901}$ etc. und zwar durch jeden folgenden dergestalt genauer ausgedrückt, dafs jeder kleinere Bruch minder genau ist. Da nun diese Reihe von Brüchen nirgends aufhört, sondern so anwächst, dafs endlich Nenner und Zähler, ohne gemeinsame Theiler zu haben, grösser werden als jede fürgegebene Zahl, so folgt, dafs die Tangente des Bogens $v = \frac{2}{3}$ irrational sey. Eben dieses gilt auch für die Tangenten jeder Bögen, die $= \frac{m}{n}$ sind, oder zum Halbmesser ein rationales Verhältnifs haben. Zieht man die erstgefundene Brüche von einander ab, so erhält man für die Tangente des Bogens $v = \frac{2}{3}$ die Reihe

$$\frac{2}{3} + \frac{8}{3 \cdot 23} + \frac{32}{23 \cdot 333} + \frac{128}{333 \cdot 6901} + \text{etc.}$$

welche ebenfalls stärker als jede geometrische Reihe convergirt und eine irrationale Summe hat.

§ 15.

Da demnach die Tangente eines jeden rationalen Bogens irrational ist, so ist hinwiederum auch der Bogen einer jeden rationalen Tangente irrational. Denn man setze, der Bogen wäre rational, so würde der Voraussetzung zuwider die Tangente, vermöge des erst erwiesenen, irrational seyn.

§ 16.

Wir haben in den trigonometrischen Tabellen eine einige rationale Tangente, nemlich die von 45 Gr., welche den Halbmesser gleich, und demnach = 1 ist. Damit ist also der Bogen von 45 Gr. und folglich auch der Bogen 90, 180, 360 Gr. irrational, oder diese Bögen haben zu dem Halbmesser des Circuls kein rationales Verhältnifs.

§ 17.

Aus dem bisher gesagten erhellet demnach so viel, dafs kein Bogen nebst seiner Tangente zugleich ein rationales Verhältnifs zum Halbmesser haben könne. Es ist aber auf unzählige Arten möglich, dafs ein Bogen zu seiner Tangente ein rationales Verhältnifs habe. Allein es läfst sich auch beweisen, dafs in allen diesen Fällen, sowohl der Bogen als die Tangente desselben, mit dem Halbmesser incommensurabel sind. Denn erstlich können, vermöge des bereits erwiesenen, nicht beyde zugleich zu dem Halbmesser ein rationales Verhältnifs haben. Man setze demnach, es sey nur die Tangente oder nur der Bogen allein. Im ersten Fall müste die Tangente sowohl mit dem Halbmesser als mit dem Bogen commensurabel seyn. Und so wäre eben dadurch auch der Bogen mit dem Halbmesser commensurabel, weil die Summe oder die Differenz zweyer rationalen Verhältnisse ebenfalls rational ist. Im andern Fall wäre der Bogen zugleich mit der Tangente als mit dem Halbmesser commensurabel, und so würde ebenfalls die Tangente zu dem Halbmesser ein rationales Verhältnifs haben. Da nun vermöge des vorhin erwiesenen, Halbmesser, Bogen und Tangente nicht zugleich commensurabel sind, so werden die beyden angeführten Fälle umgestossen; demnach wenn Bogen und Tangente unter sich ein rationales Verhältnifs haben, so sind beyde mit dem Halbmesser incommensurabel.

§ 18.

Noch werde ich kurz zween Umstände berühren, die in Absicht auf die Quadratur des Circuls etwas scheinbares haben. Der erste ist folgender Satz: Wenn man um einen Circul ein

beliebiges regulaires oder irregulaires Vieleck beschreibt, so, dafs jede Seite den Circul berühre, so verhält sich der Umkreis des Vielecks zu seinem Inhalte, wie sich der Umkreis des Circuls zu seinem Inhalte verhält. Den Beweis übergehe ich, weil er sehr leicht ist. Der andere Umstand ist ein Phaenomenon, welches sich folgendermafsen eräugnet. Wenn man 1 durch 0,7853981633 . . . als den vierten Theil der Ludolphischen Zahlen dividirt, so geht es 1mal, und es bleibt 0,2146018366 . . . Dividirt man ferners diesen Überrest in die 0,7853981633 . . . durch die man vorhin getheilt hatte, so geht es 3mal und es bleibt 0,1415926535 . . . Setzt man diesem Überrest die Zahl 3 vor, so erhält man 3,1415926535 . . . welches gerade die Ludolphische Zahlen sind. Hiezu sage ich weiter nichts, als dafs es ein blosses Phaenomenon ist, woraus sich auf die Quadratur des Circuls schlechthin nicht schliessen läfst. Es ist auch nicht schwer die Ursache davon zu finden.

V.

ADRIEN MARIE LEGENDRE.

(1752—1833.)

BEWEIS, DASS DAS VERHÄLTNIS DES KREISUMFANGES ZUM DURCHMESSER UND DAS QUADRAT DESSELBEN IRRATIONALE ZAHLEN SIND.

(ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE. NOTE IV, OÙ L'ON DÉMONTRE QUE LE RAPPORT DE LA CIRCONFÉRENCE AU DIAMÈTRE ET SON QUARRÉ SONT DES NOMBRES IRRATIONNELS.)

Betrachten wir die unendliche Reihe:

$$1 + \frac{a}{z} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{z(z+1)} + \frac{1}{2.3}\frac{a^3}{z(z+1)(z+2)} + \text{etc.},$$

deren allgemeines Glied $\frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{a^n}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n-1)}$ ist, und nehmen wir an, dafs $\varphi(z)$ die Summe derselben darstelle. Setzt man $z+1$ an die Stelle von z, so wird in gleicher Weise $\varphi(z+1)$ die Summe der unendlichen Reihe:

$$1 + \frac{a}{z+1} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{(z+1)(z+2)} + \frac{1}{2.3}\frac{a^3}{(z+1)(z+2)(z+3)} + \text{etc.}$$

sein. Ziehen wir, Glied für Glied, von der ersten Reihe die zweite ab, so erhalten wir $\varphi(z) - \varphi(z+1)$ als Summe der Reihe:

$$\frac{a}{z(z+1)} + \frac{a^2}{z(z+1)(z+2)} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \text{etc.}$$

Aber diese Reihe kann auf die Form gebracht werden:

$$\frac{a}{z(z+1)}\left(1 + \frac{a}{z+2} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{(z+2)(z+3)} + \text{etc.}\right)$$

und reduziert sich daher auf $\frac{a}{z(z+1)}\varphi(z+2)$. Man hat folglich allgemein:

$$\varphi(z) - \varphi(z+1) = \frac{a}{z(z+1)}\varphi(z+2).$$

Wir dividieren diese Gleichung durch $\varphi(z+1)$ und führen, um das Resultat zu vereinfachen, eine neue Funktion $\psi(z)$ von z ein, der Art, dafs $\psi(z) = \frac{a}{z}\frac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)}$ sei; alsdann kann man $\frac{a}{z\psi(z)}$ an die Stelle von $\frac{\varphi(z)}{\varphi(z+1)}$ und $\frac{(z+1)\psi(z+1)}{a}$ an die Stelle von $\frac{\varphi(z+2)}{\varphi(z+1)}$ setzen. Führt man diese Substitution aus, so erhält man:

$$\psi(z) = \frac{a}{z + \psi(z+1)}.$$

Setzt man aber in dieser Gleichung der Reihe nach $z+1$, $z+2$, etc. an die Stelle von z, so führt dies zu:

$$\psi(z+1) = \frac{a}{z+1+\psi(z+2)},$$

$$\psi(z+2) = \frac{a}{z+2+\psi(z+3)}, \text{ etc.}$$

Daraus folgt, dafs der Wert von $\psi(z)$ ausgedrückt werden kann durch den Kettenbruch:

$$\psi(z) = \frac{a}{z} + \frac{a}{z+1} + \frac{a}{z+2} + \text{etc.}$$

Umgekehrt hat dieser Kettenbruch, wenn er bis ins Unendliche fortgesetzt wird, die Funktion $\psi(z)$, oder was dasselbe ist, den Ausdruck $\frac{a}{z}\frac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)}$ zur Summe und die Summe ist, in Reihen entwickelt, gleich:

$$\frac{a}{z}\,\frac{1+\frac{a}{z+1}+\frac{1}{2}\frac{a^2}{(z+1)(z+2)}+\text{etc.}}{1+\frac{a}{z}+\frac{1}{2}\frac{a^2}{z(z+1)}+\text{etc.}}.$$

Es sei jetzt $z=\frac{1}{2}$, so wird der Kettenbruch zu:

$$\frac{2a}{1} + \frac{4a}{3} + \frac{4a}{5} + \text{etc.}$$

In diesem Kettenbruche sind die Zähler, abgesehen von dem ersten, alle gleich $4a$, während die Nenner die Reihe der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, etc. bilden. Der Wert desselben kann also auch durch:

$$2a\,\frac{1+\frac{4a}{2.3}+\frac{16a^2}{2.3.4.5}+\frac{64a^3}{2.3\ldots7}+\text{etc.}}{1+\frac{4a}{2}+\frac{16a^2}{2.3.4}+\frac{64a^3}{2.3\ldots6}+\text{etc.}}$$

ausgedrückt werden. Aber die hier auftretenden Reihen beziehen sich auf bekannte Formeln. In der That, wenn man unter e die Zahl versteht, deren hyperbolischer Logarithmus

gleich 1 ist, so reduziert sich der vorhergehende Ausdruck auf $\frac{e^{2\sqrt{a}} - e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}} + e^{-2\sqrt{a}}} \sqrt{a}$, sodafs man ganz allgemein hat:

$$\frac{e^{2\sqrt{a}} - e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}} + e^{-2\sqrt{a}}} \cdot 2\sqrt{a} = \frac{4a}{1} + \frac{4a}{3} + \frac{4a}{5} + \text{etc.}$$

Hieraus lassen sich zwei Grundformeln ableiten, je nachdem nämlich a positiv oder negativ ist. Ist zunächst $4a = x^2$, so folgt:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{5} + \text{etc.}$$

Ist dagegen $4a = -x^2$, so wird man, auf Grund der bekannten Formel:

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} = i \operatorname{tg} x \text{ erhalten:}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{5} - \frac{x^2}{7} - \text{etc.}$$

Diese letztere Formel wird die Grundlage unseres Beweises bilden. Zunächst aber müssen noch die beiden folgenden Hülfssätze bewiesen werden.

Hülfssatz I.

Es sei der bis ins Unendliche fortgesetzte Kettenbruch gegeben:

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} + \frac{m''}{n''} + \text{etc.},$$

in welchem die Zahlen m, n, m', n', etc. alle ganze positive oder negative Zahlen sind; setzt man ferner voraus, dafs die einzelnen Brüche $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, etc. alle kleiner als die Einheit seien, so läfst sich zeigen, dafs der Gesamtwert des Kettenbruches notwendig eine irrationale Zahl sein mufs.

Zunächst behaupte ich, dafs dieser Wert kleiner sei als die Einheit. In der That, ohne Beschränkung der Allgemein-

heit kann man voraussetzen, dafs die sämtlichen Nenner n, n', n'', etc. positiv seien. Nimmt man nun ein einziges Glied des gegebenen Bruches, so ist, nach Voraussetzung, $\frac{m}{n} < 1$. Nimmt man die beiden ersten, so wird, da $\frac{m'}{n'} < 1$ ist, $n + \frac{m'}{n'}$ gröfser sein als $n - 1$; aber m ist kleiner als n, und da beide ganze Zahlen sind, so wird auch m kleiner sein als $n + \frac{m'}{n'}$. Also ist der aus den beiden ersten Gliedern gebildete Bruch:

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'}$$

kleiner als die Einheit.

Nehmen wir drei Glieder des gegebenen Kettenbruches, so wird zunächst, zufolge des eben bewiesenen, der Wert des Teiles $\frac{m'}{n'} + \frac{m''}{n''}$ kleiner sein als die Einheit. Bezeichnen wir diesen Wert mit ω, so ist klar, dafs $\frac{m}{n + \omega}$ auch noch kleiner sein wird als die Einheit; folglich ist auch der aus den drei ersten Gliedern gebildete Bruch:

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} + \frac{m''}{n''}$$

kleiner als die Einheit. Setzt man dieses Verfahren fort, so wird man finden, dafs, wie viele Glieder des gegebenen Kettenbruches man auch berechnen mag, der daraus resultierende Wert stets kleiner ist als die Einheit; daher wird auch der Gesamtwert des bis ins Unendliche fortgesetzten Bruches kleiner sein als die Einheit. Nur in einem einzigen Falle könnte er der Einheit gleich sein, nämlich dann, wenn der gegebene Bruch von der Form:

$$\frac{m}{m+1} - \frac{m'}{m'+1} - \frac{m''}{m''+1} - \text{etc.}$$

wäre; in jedem anderen Falle aber ist er kleiner.

Dies vorausgeschickt, wollen wir nun annehmen der Wert des gegebenen Kettenbruches sei keine irrationale Zahl, sondern er sei gleich der rationalen Zahl $\frac{B}{A}$, wo A und B irgend welche ganze Zahlen bedeuten. Man hat dann also:

$$\frac{B}{A} = \frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} + \frac{m''}{n''} + \text{etc.}$$

Es seien ferner C, D, E, etc. unbestimmte Zahlen, der Art, dafs:

$$\frac{C}{B} = \frac{m'}{n'} + \frac{m''}{n''} + \frac{m'''}{n'''} + \text{etc.},$$

$$\frac{D}{C} = \frac{m''}{n''} + \frac{m'''}{n'''} + \frac{m^{\text{IV}}}{n^{\text{IV}}} + \text{etc.}$$

und so fort bis ins Unendliche ist. Da die sämtlichen Glieder dieser verschiedenen Kettenbrüche kleiner als die Einheit sind, so sind nach dem, was soeben bewiesen worden ist, auch die Werte der Kettenbrüche selbst, d. h. $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{C}$, $\frac{E}{D}$, etc. kleiner als die Einheit; es ist daher $B < A$, $C < B$, $D < C$, etc., woraus man erkennt, dafs die Zahlenfolge A, B, C, D, E, etc. eine bis ins Unendliche abnehmende ist. Die Verbindung der Kettenbrüche aber, um die es sich handelt, liefert:

$$\frac{B}{A} = \frac{m}{n + \frac{C}{B}}, \text{ woraus sich ergiebt } C = mA - nB,$$

$$\frac{C}{B} = \frac{m'}{n' + \frac{D}{C}}, \text{ woraus sich ergiebt } D = m'B - n'C,$$

$$\frac{D}{C} = \frac{m''}{n'' + \frac{E}{D}}, \text{ woraus sich ergiebt } E = m''C - n''D,$$

etc. etc.

Weil nun nach Voraussetzung die beiden ersten Zahlen A und B ganze Zahlen sind, so folgt, dafs alle andern C, D, E, etc., welche bisher noch unbestimmte Gröfsen waren, gleichfalls ganze Zahlen sind. Es ist aber ein Widerspruch, dafs eine unendliche Zahlenfolge A, B, C, D, E, etc. eine fortwährend abnehmende und gleichzeitig aus ganzen Zahlen zusammengesetzte sei; denn andererseits kann keine der Zahlen A, B, C, D, E, etc. gleich Null sein, weil der gegebene Kettenbruch sich bis Unendliche erstreckt und demnach die Ausdrücke $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{C}$, etc. fortwährend einen bestimmten

Wert haben müssen. Es ist daher die Annahme hinfällig, dafs die Summe des gegebenen Kettenbruches einer rationalen Zahl $\frac{B}{A}$ gleich sei; diese Summe ist also notwendig eine irrationale Zahl.

Hülfssatz II.

Wenn, unter den gleichen Voraussetzungen, die einzelnen Brüche $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, etc. am Anfange der Entwicklung einen beliebigen Wert haben, aber nach einem bestimmten Intervalle fortwährend kleiner als die Einheit sind, so wird der gegebene Kettenbruch, immer vorausgesetzt, dafs er sich bis ins Unendliche erstrecke, einen irrationalen Wert haben.

Denn wenn beispielsweise von $\frac{m'''}{n'''}$ an alle die Brüche $\frac{m'''}{n'''}$, $\frac{m^{\mathrm{IV}}}{n^{\mathrm{IV}}}$, $\frac{m^{\mathrm{V}}}{n^{\mathrm{V}}}$, und so fort bis ins Unendliche, kleiner als die Einheit sind, so wird, nach dem ersten Hülfssatze, der Kettenbruch:

$$\frac{m'''}{n'''} + \frac{m^{\mathrm{IV}}}{n^{\mathrm{IV}}} + \frac{m^{\mathrm{V}}}{n^{\mathrm{V}}} + \text{etc.}$$

einen irrationalen Wert haben. Nennen wir denselben ω, so wird der gegebene Kettenbruch zu:

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} + \frac{m''}{n''} + \omega.$$

Setzt man aber, der Reihe nach,

$$\frac{m''}{n'' + \omega} = \omega', \quad \frac{m'}{n' + \omega'} = \omega'', \quad \frac{m}{n + \omega''} = \omega''',$$

so ist klar, dafs wenn ω irrational ist, die Gröfsen ω', ω'', ω''' alle gleichfalls irrational sein müssen. Die letzte ω''' aber ist gleich dem gegebenen Kettenbruche; also ist der Wert desselben irrational.

Kehren wir zu unserer ursprünglichen Aufgabe zurück, so können wir jetzt den folgenden allgemeinen Satz beweisen:

Lehrsatz.

Wenn ein Bogen mit dem Radius kommensurabel ist, so wird seine Tangente mit demselben Radius inkommensurabel sein.

In der That, es sei der Radius $= 1$ und der Bogen $x = \frac{m}{n}$, wo m und n ganze Zahlen sind, so giebt, wenn man die Substitution ausführt, die oben gefundene Formel:

$$\operatorname{tg}\frac{m}{n} = \frac{m}{n - \dfrac{m^2}{3n - \dfrac{m^2}{5n - \dfrac{m^2}{7n - \text{etc.}}}}}$$

Dieser Kettenbruch aber ist so, wie ihn der zweite Hülfssatz voraussetzt; denn da die Nenner $3n$, $5n$, $7n$, etc. fortwährend zunehmen, während der Zähler m^2 der gleiche bleibt, so werden die einzelnen Brüche bald kleiner als die Einheit werden. Folglich ist der Wert von $\operatorname{tg}\frac{m}{n}$ irrational, d. h. wenn der Bogen mit dem Radius kommensurabel ist, so wird seine Tangente inkommensurabel sein.

Hieraus ergiebt sich, als unmittelbare Folge, der Satz, der den Gegenstand dieser Note ausmacht. Es sei π der halbe Umfang des Kreises mit dem Radius gleich 1; wenn nun π rational wäre, so würde das Gleiche von dem Bogen $\frac{\pi}{4}$ gelten und folglich müfste die Tangente desselben irrational sein. Man weifs aber im Gegenteil, dafs die Tangente des Bogens $\frac{\pi}{4}$ gleich dem Radius 1 ist; folglich kann π nicht rational sein. Daher ist das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser eine irrationale Zahl*).

---

*) Dieser Satz ist zum ersten Male von Lambert in den Berliner Memoiren vom Jahre 1761 bewiesen worden. (Dafs der Satz nicht im Jahre 1761, sondern im Jahre 1766, und auch nicht zuerst in den Berliner Memoiren, sondern in den „Beyträgen“ von Lambert bewiesen worden ist, wurde bereits pag. 56 bemerkt. Der Irrtum rührt daher, dafs jene im Jahre 1767 gelesene Akademieabhandlung sich in dem mit der Jahreszahl 1761 versehenen Bande der Berliner Memoiren befindet. Dieser Band wurde aber erst 1768 gedruckt und enthält in bunter Unordnung Abhandlungen aus den Jahren 1749, 1758, 1760, 1763, 1767. R.)

Es ist wahrscheinlich, dafs die Zahl π nicht einmal unter den algebraischen Irrationalitäten enthalten ist, d. h. dafs sie nicht Wurzel sein kann einer algebraischen Gleichung mit einer endlichen Anzahl von Gliedern, deren Koeffizienten rational sind. Aber es scheint sehr schwer zu sein, diesen Satz strenge zu beweisen. Wir können nur zeigen, dafs auch noch das Quadrat von π eine irrationale Zahl ist.

In der That, wenn man in dem Kettenbruche, durch welchen $\operatorname{tg} x$ ausgedrückt wird, $x = \pi$ setzt, so wird man, wegen $\operatorname{tg} \pi = 0$, erhalten:

$$0 = 3 - \frac{\pi^2}{5 - \frac{\pi^2}{7 - \frac{\pi^2}{9 - \text{etc.}}}}$$

Wenn nun π^2 rational wäre und man hätte $\pi^2 = \frac{m}{n}$, wo m und n ganze Zahlen sind, so würde folgen:

$$3 = \frac{m}{5n - \frac{m}{7 - \frac{m}{9n - \frac{m}{11 - \text{etc.}}}}}.$$

Aber offenbar ist dieser Kettenbruch wieder so, wie ihn der zweite Hülfssatz voraussetzt, sein Wert ist also irrational und kann nicht gleich der Zahl 3 sein. Folglich ist das Quadrat des Verhältnisses der Kreisperipherie zum Durchmesser eine irrationale Zahl.

Bachmann, Dr. **Paul**, a. o. Prof. an der Universität zu Breslau, die Lehre von der Kreistheilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie. Akademische Vorlesungen. Mit Holzschnitten im Text und 1 lithogr. Tafel. [XII u. 300 S.] gr. 8. 1872. geh. n. *M.* 7.—

——— die Elemente der Zahlentheorie. gr. 8. 1892. geh. [Unter der Presse.]

Baumgart, Dr. phil. **Oswald**, über das quadratische Reciprocitätsgesetz. Eine vergleichende Darstellung der Beweise des Fundamentaltheoremes in der Theorie der quadratischen Reste und der derselben zu Grunde liegenden Principien. [104 S.] gr. 8. 1885. geh. n. *M.* 2.40.

Graefe, Dr. **Friedrich** (Professor an der techn. Hochschule zu Darmstadt), Vorlesungen über die Theorie der Quaternionen mit Anwendung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. [IV u. 164 S. mit Figuren im Text.] gr. 8. 1883. geh. n. *M.* 3.60.

Hermes, Dr. **Johann**, ordentlicher Lehrer am Progymnasium des Königl. Waisenhauses zu Königsberg in Preussen, Gleichungen ersten und zweiten Grades schematisch aufgelöst in ganzen Zahlen. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. [VII u. 87 S.] gr. 8. 1882. geh. n. *M.* 1.60.

Legendre, Adrien-Marie, Zahlentheorie. Nach der dritten Ausgabe ins Deutsche übertragen von H. Maser. 2 Bände. [I. Band: XVIII u. 442 S., II. Band: XII u. 453 S.] gr. 8. 1887. Geh. n. *M.* 23.20.

Scheffler, Dr. **Hermann**, Herzogl. Braunschw. Baurath, die magischen Figuren. Allgemeine Lösung und Erweiterung eines aus dem Altertume stammenden Problems. Mit zwei lithographirten Tafeln. [III u. 112 S.] gr. 8. 1882. geh. n. *M.* 2.40.

Stolz, Dr. **Otto**, ord. Professor an der Universität zu Innsbruck, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. Nach den neueren Ansichten bearbeitet. 2 Teile. gr. 8. geh. n. *M.* 16.—

I. Teil. Allgemeines und Arithmetik der reellen Zahlen [VI u. 344 S.] 1885. n. *M.* 8.—

II. — Arithmetik der complexen Zahlen mit geometrischen Anwendungen. [VIII u. 326 S.] 1886. n. *M.* 8.—

——— d. Z. Rector der Universität Innsbruck, Grössen u. Zahlen. [30 S.] gr. 8. 1891. geh. n. *M.* —.80.

Tait, P. G., Professor der Physik an der Universität in Edinburg, elementares Handbuch der Quaternionen. Autorisierte Übersetzung von Dr. G. v. Scherff. [XVI u. 332 S.] gr. 8. 1880. geh. n. *M.* 10.—

Wertheim, **Gustav** (Oberlehrer an der Real- u. Volksschule der israelitischen Gemeinde in Frankfurt a. M.), Elemente der Zahlentheorie. [X u. 382 S.] gr. 8. 1887. geh. n. *M.* 8.40.

QA
467
R84

Rudio, Ferdinand
Archimedes

Physical &
Applied Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY